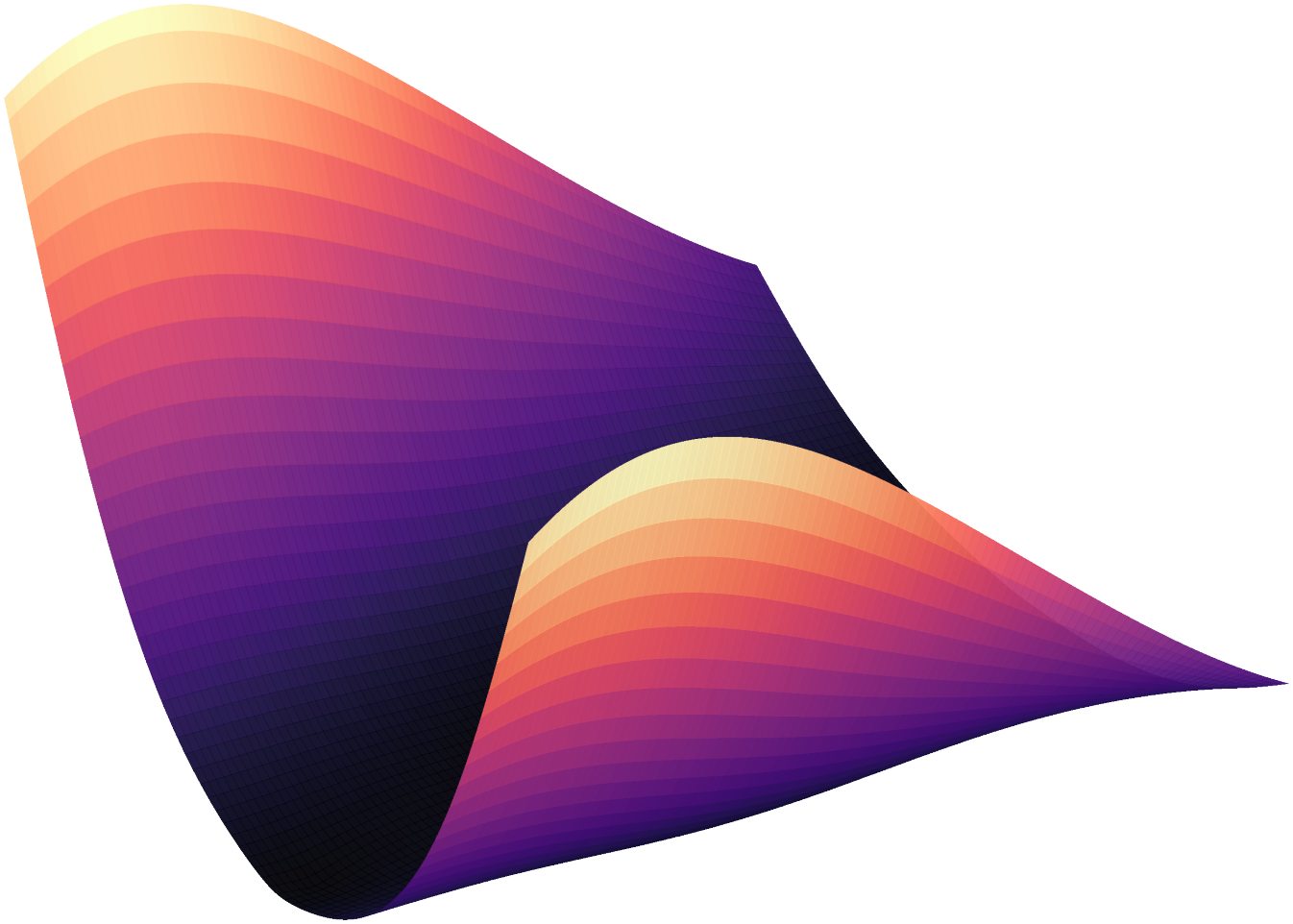
Ausgabe 2

Trivial

Das Magazin



Prolog

Was ist TRIVIAL?

Dies ist eine ausgezeichnete Frage, auf die wir selbst auch noch keine vollständige Antwort haben.

Erstmal vorweg möchten wir sagen, dass wir mit keinem der folgenden Artikel einen Anspruch auf Vollständigkeit oder fachliche Korrektheit haben. Es wird hier vereinfacht werden! Wir werden auch nicht mit Formeln um uns schmeißen. Dies ist kein Fachbuch oder Fachjournal und möchte auch keins sein.

Unser persönliches Ziel ist es, sich auf eine kulturell moderne und teils humoristische Art mit dem Thema “Wissenschaft”, ganz spezifisch der Mathematik und der Physik, auseinanderzusetzen.

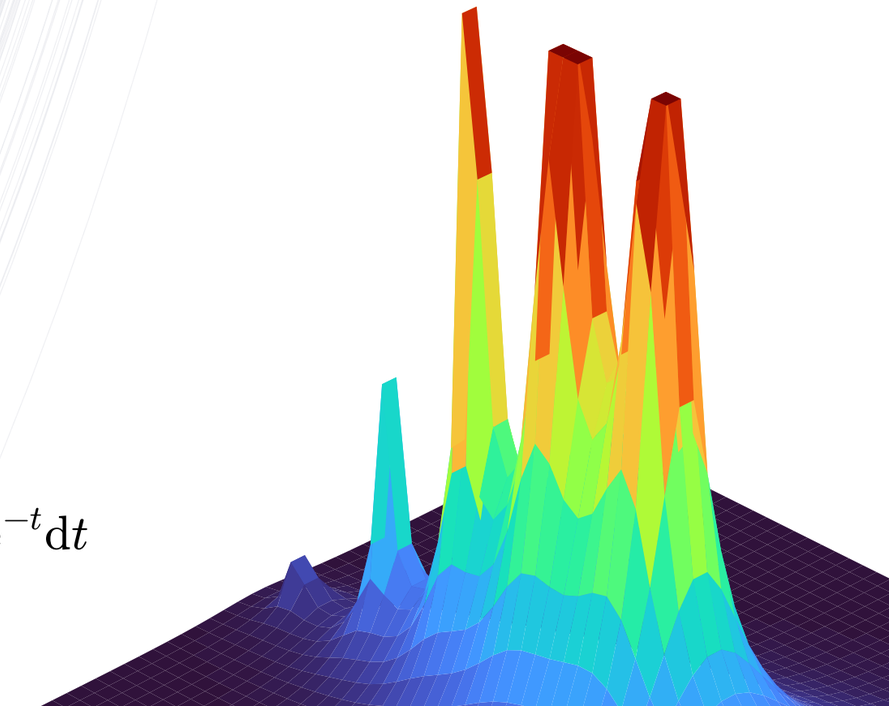
Uns stört seit Jahren der Umgang mit teils komplexen Themen (vor allem Quantenphysik!) in der Pop Science. Außerdem gibt es kaum Lese-Optionen, sich tiefgehend mit einem Thema auseinanderzusetzen, ohne Journals zu lesen. Deswegen nehmen wir das Ruder selbst in die Hand mit der Behauptung: Wir können es besser!

Dabei ist es natürlich relevant auch zu klären, an welche Zielgruppe sich dieses Magazin richtet. So verallgemeinernd kann man das natürlich schwer sagen, aber wir streben an, dass dieses Magazin von Wissenschaftsinteressierten allen Alters und aller Bildungsgrade nachvollziehbar ist. Dabei versuchen wir nie zu viel Wissen vorauszusetzen, können aber vorweg gleich mitgeben, dass man dieses Magazin keinem Kleinkind als “erste wissenschaftliche Lektüre” geben sollte. Es wird eher der Fall sein, dass man ein gewisses “Szene-Kenntnis” benötigt, um sich in einigen Artikeln zurechtzufinden. Dabei ist jeder Artikel losgelöst von den anderen, wenn man nur Interesse am letzten Artikel dieser Zeitschrift hat, dann kann man theoretisch direkt zu diesem springen. Natürlich sollte man dann ein schlechtes Gewissen haben, weil man unzählige Perlen verpasst hat, aber theoretisch ist es möglich.

Artikelübersicht

1.	Millennium Prize Introductions	**: Birch und Swinnerton-Dyer Vermutung**	**1**
2.	Die G´s der Mathematik	**: George Green**	**13**
3.	Lustige Witzbilder	**: L-Funktionen**	**17**
4.	Die Formel der Ausgabe	**: Zählen von Dreieicken**	**21**
5.	Underrated	**: Der wichtigste Name der Mathematik**	**27**
6.	Kuriositäten der Mathematik	**: Wie Chaos die Welt regiert**	**35**
7.	Politik und Wissenschaft	**: Die Indiana Pi Bill**	**41**
8.	Ein Paar Takte über	**: Aliens**	**45**
9.	Weird Papers	**: Taylor Swifts Einfluss auf die Astrophysik**	**49**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$



Millennium Prize Introduction

Die Birch und Swinnerton-Dyer Vermutung

Nachdem in der letzten Ausgabe die Riemannsche Vermutung als Millenium-Problem vorgestellt wurde, geht es in dieser Ausgabe mit der Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung weiter. Diese ist eng mit der allgemeinen Riemannschen Vermutung verbunden, doch ist das Lesen dieses Artikels nicht notwendig für das Verstehen der BSD-Vermutung. Ein schlechtes Gewissen ist dennoch angemessen, denn ein Wunder der Mathematik würde euch so entgehen.

Die Birch und Swinnerton-Dyer Vermtung, im folgenden nur noch BSD-Vermutung, ist wie die Riemannsche Vermutung auch in eine “starke” und eine “schwache” Vermutung aufgeteilt, vor allem über die Schwache wird dieser Artikel informieren.

Sinngemäß lautet diese wie folgt:

Der algebraische Rang einer elliptischen Kurve

=

Der analytische Rang der L-Funktion der elliptischen Kurve

Geboren aus einem antiken Röhrencomputer

Im Gegensatz zu den meisten großen mathematischen Vermutungen, die durch reine theoretische Überlegungen auf dem Papier entstanden, ist die BSD-Vermutung ein Kind der "experimentellen Mathematik". Bryan Birch und Peter Swinnerton-Dyer nutzten in den frühen 1960er Jahren den EDSAC 2, um zehntausende Berechnungen durchzuführen. Sie erkannten in den ausgespuckten Daten ein Muster, das zur Vermutung führte.

Das sind erstmal einige Wörter, die zu verstehen sind, aber das klingt doch eigentlich erst einmal gar nicht so schwierig, oder?

Doch beginnen wir zunächst von vorne:

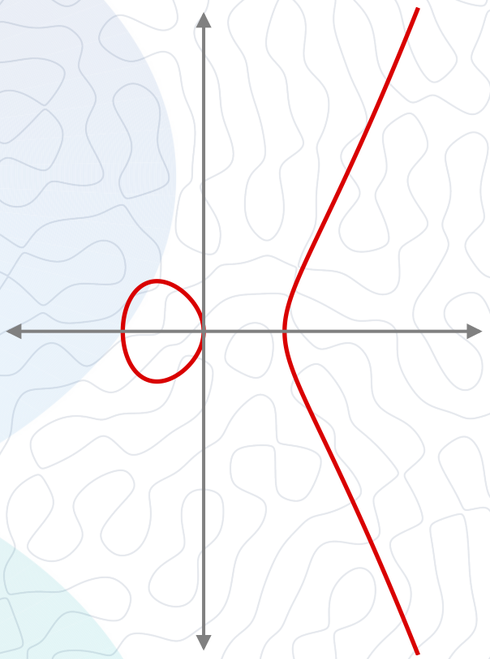
Elliptic Curves sind Gleichungen, die wie folgt aufgebaut sind:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

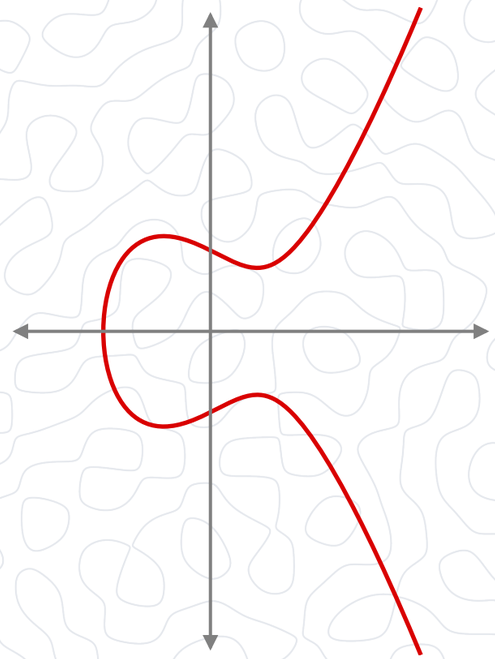
In diesem Fall können alle a alle möglichen Zahlen sein, doch sind sie festgelegt. Im Normalfall werden aber nur Gleichungen mit folgender Form behandelt:

$$y^2 = ax^3 + bx + c$$

Hier sind zwei mögliche Elliptic Curves visualisiert:



$y^2 = x^3 - x$



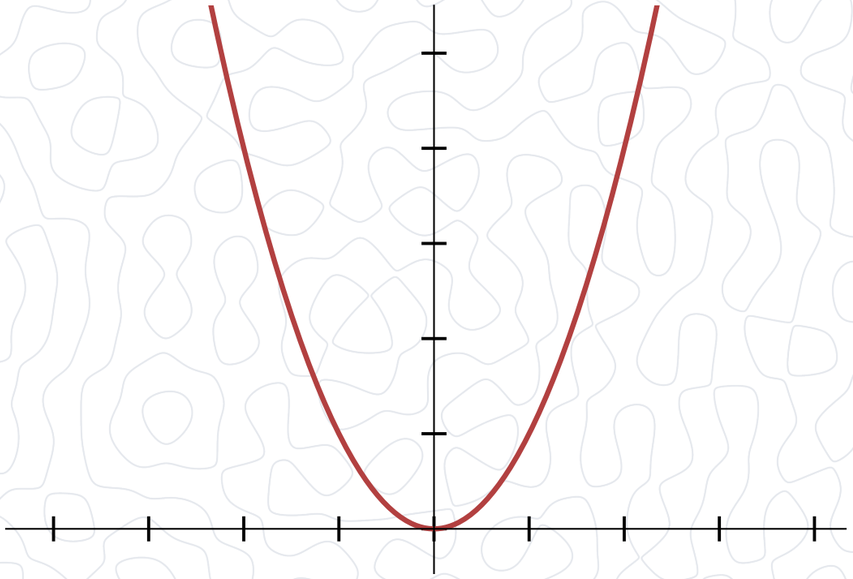
$y^2 = x^3 - x + 1$

Der Rang der beiden Gleichung ist stets 3, da der höchste Exponent 3 ist. Wer in der Schule bei Funktionenanalye aufgepasst hat, weiß, dass es in einem solchen Fall höchstens 3 Nullstellen gibt. Daraus lässt sich aber auch ableiten, dass für jede beliebige Gerade in diesem Koordinatensystem ebenfalls 3 mal die Elliptic Curve geschnitten wird. Dies ist aber bisher noch nicht gegeben, es kann auch nur einen oder zwei Schnittpunkte mit dem Graphen geben. Für die Vermutung ist es jedoch ziemlich wichtig, dass es jederzeit drei Schnittpunkte gibt.

Zur Lösung dieses Problems gibt es drei Ansätze:

Erst einmal gibt es Schnittpunkte verschiedenen Ranges.

Beim Graph $y = x^2$ wird beispielsweise die Nullstelle bei (0|0) als doppelte Nullstelle gewertet, da der Graph diese nicht schneidet, sondern nur berührt. Ebenfalls gibt es Nullstellen dritten und vierten Grades und so weiter.



Dieses Konzept der Nullstellen eines höheren Ranges lässt sich problemlos auch auf Schnittpunkte einer Geraden mit einer Elliptic Curve übertragen. Doch reicht es nicht, damit jede Gerade drei Schnittpunkte hat.

Obacht, jetzt wirds komplex

Der nächste Trick sind die komplexen Zahlen. Während bei allen reellen Zahlen die Seite von Y^2 nie negativ sein kann (und somit auch nicht die andere Seite), ergibt die Quadratur komplexer Zahlen eine negative Zahl. Die komplexen Zahlen werden durch ein i markiert und bieten eine weitere Zahlendimension, der Zahlenstrahl wird ein Zahlen-Koordinatensystem. Dort gibt es die 3+4i und -2-10i. Daher sind Elliptic Curves mit komplexen Zahlen schwer in einem Koordinatensystem darzustellen, denn dafür bräuchte es vierdimensionale Koordinatensysteme, hierfür mangelt es uns Menschen an bildlicher Vorstellung.

Doch somit kann auch die rechte Seite der Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ negative Werte haben, im Falle der Gleichung $y^2 = x^3 - x$ gibt es nun also auch eine Lösung für $x = ½$, und zwar bei $y = (⅜)^2i$.

Der nächste (und letzte) Trick, um jederzeit an drei Lösungen zu kommen, ist die sogenannte projektive Ebene (oder “projective plane”, da englisch nunmal die Hauptsprache der Wissenschaft ist).

Stellen wir uns zwei parallele Geraden vor, diese haben immer den gleichen Abstand. Doch was, wenn wir uns in das Koordinatensystem hereindenken, anstatt dass wir nur von oben schauen? Dann sehen wir, dass sich die Geraden immer näher kommen, Kunstinteressierte kennen dieses Konzept auch unter dem Titel “Fluchtpunkt”. Quasi “außerhalb dieser Zahlenebene” treffen sich die beiden Geraden, hier gibt es einen Schnittpunkt. Und dieser Schnittpunkt kann entweder bei y = “∞” (notiert als (0:1:0)) oder bei x = “∞” (notiert als (1:0:0)). Und wenn sich Geraden auf einer projektiven Ebene treffen können, dann können auch Kurven das. Und hiermit ist das Ziel erreicht, dass jede elliptic curve drei Schnittpunkte mit jeder beliebigen Gerade hat.

Wichtig ist: Die Punkte -∞ und ∞ sind gleich, sie werden jeweils nur einmal aufgezählt. Ansonsten hätten einige elliptic curves vier Schnittpunkte mit einer Geraden.

Punkte zählen - auf einer Kurve?

Darum geht es letzendlich bei der BSD-Vermutung: Es wird die Anzahl der rationalen Punkte (also bei denen beide Koordinaten durch rationale Zahlen angegeben werden) bestimmt. Und überraschenderweise gibt es hier spannende Forschungsergebnisse durch den Mathematiker Gerd Faltings. Dieser hat die Vermutung von Louis Mordell bewiesen, dass auf jeder elliptic curve es eine endlich generierte Gruppe an Punkten gibt.

Aber was heißt denn “endlich generiert”?

Hierfür müssen wir zunächst in die Gruppentheorie gehen. Zahlenmengen gibt es überall. Rationale Zahlen, ganze Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen - das sind wohl die Bekanntesten. Doch es gibt noch andere, zum Beispiel Z/12Z, wo, wenn die Zahl 12 erreicht wird, sie wieder auf 0 springt. Vielen ist dieses Verhalten vermutlich von einer analogen Uhr bekannt. Die Zahlengruppe Z/12Z wird auch „modulare Gruppe“ genannt, solche modularen Gruppen weisen noch viele spannende Charakteristika auf.

Zahlengruppen müssen immer bestimmte Kriterien erfüllen, um als Gruppe zu gelten. Hier gibt es auch Unterschiede, die sind jetzt aber erst einmal nicht so wichtig, die werden im ersten Semester des Mathematikstudiums nochmal genauer erklärt.

Die irreführende Namensgebung

Elliptische Kurven sind gar keine Ellipsen. Als Mathematiker vor Jahrhunderten versuchten den genauen Umfang einer Ellipse zu berechen, stießen sie auf eine bestimme Art von Gleichungen dessen Umkehrfunktionen genau der Parametrisierung der elliptischen Kurven entsprechen.

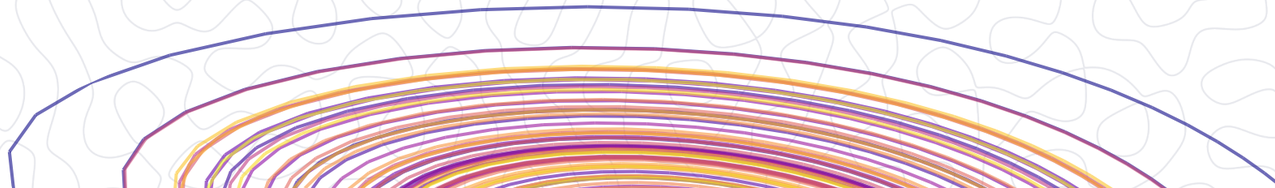
Für jede Zahlengruppe benötigen wir ein neutrales Element der Gruppe, für die X + “neutrales Element” = X gilt.

Dies ist bei der Zahlengruppe der Punkte auf der Elliptic Curve der Punkt (0:1:0), also der “Punkt an der Unendlichkeit” bei der Y-Achse, auch e genannt. Werden Punkte auf der Kurve mit diesem Punkt addiert, so sind diese Punkte auch das Ergebnis der Addition. Außerdem muss X + (-X) = e gelten.

Grob beschrieben heißt “endlich generiert”: Die Punkte auf der Kurve lassen sich addieren und mit ganzen Zahlen multiplizieren. Und selbst wenn sie aus einer endlichen Anzahl an Punkten generiert werden, können unter bestimmten Voraussetzungen unendlich viele rationale Punkte auf der Kurve sein.

Und wie lassen sich Punkte “addieren”? Das ist ziemlich kontraintuitiv, aber die Ergebnisse sind faszinierend. Denn hierfür brauchen wir das Wissen, dass auf jeder Gerade in der Ebene immer drei Schnittpunkte mit der Elliptic Curve sind.

Wenn zwei Punkte A +B addiert werden, so wird ein dritter Punkt X durch diese Gerade geschnitten. Anschließend wird bei diesem Punkt noch eine senkrechte Gerade gezogen (also eine Gerade durch X und den Punkt). Diese wird ebenfalls an einer dritten Stelle den Graphen schneiden, diese ist der Punkt C. Er ist das Ergebnis aus der Addition von A + B. Und unter dieser Operation funktioniert die Gruppe an Punkten auf der Elliptic Curve gut, denn sie erfüllt gewisse Kriterien, wie dass A + B = B + A gilt. Unter Mathematikerinnen und Mathematikern nennt man diese Eigenschaft Kommutativität.



Wenn es Addition gibt, ist die Multiplikation auch nicht weit. Um diese zu verstehen, müssen wir den Fall definieren, dass ein Punkt zweimal addiert wird, also A + A. Hier wird die sogenannte Tangente genommen, also eine Gerade durch den Punkt A, die die gleiche Steigung hat, wie auch schon beim Punkt A gilt. Das Ergebnis aus diesen Punkten, nennen wir es D, ist gleichzeitig das Ergebnis von 2A. Sollten wir den Wert von 3A bestimmen wollen, müssen wir einfach A und D addieren.

Selbstverständlich ließen sich die Punkte auch rechnerisch bestimmen, das ist nicht unendlich anspruchsvoll, darum soll es aber nicht gehen.

Dieser Prozess ist unendlich weiterführbar, doch hier kommt das Verrückte: Unter Umständen kommen wir am Ende immer bei den gleichen Punkten an, ganz gleich, wie oft A multipliziert wird. Der Punkt A wird zu einem Torsion-Punkt einer gewissen Ordnung, je nachdem, wie oft A multipliziert werden muss, bis wieder zu A zurückgekommen wird. Sollte auch nach unendlicher Multiplikation immer noch keine Wiederholung kommen, dann spricht man von einem “Punkt unendlicher Ordnung”.

Wenn alle rationalen Punkte auf der Elliptic Curve durch eine endliche Anzahl an Punkten generiert (das heißt, durch Multiplikation erzeugt) werden, dann spricht man von einer endlich generierten Gruppe.

Springen wir nochmal zum Anfang: In dem Satz von Mordell-Weil heißt es, dass jede Elliptic Curve endlich generiert ist. Folglich braucht es für jede Elliptic Curve des Typs $y^2 = x^3 + ax + b$ nur eine endliche Anzahl an Punkten, um daraus (und durch Addition mit sich selbst) alle rationalen Punkte zu generieren.

Die Anzahl der Punkte unendlicher Ordnung ist der algebraische Rang, sprich die Anzahl der Punkte, die nicht Torsionspunkte sind und die, die rationalen Punkte auf der Kurve generieren. Das klingt erst einmal nach einer ziemlich großen Menge, doch wurde erst in diesem Jahr eine elliptische Kurve des algebraischen Ranges 31 gefunden.

Die Gleichung hierfür lautet:

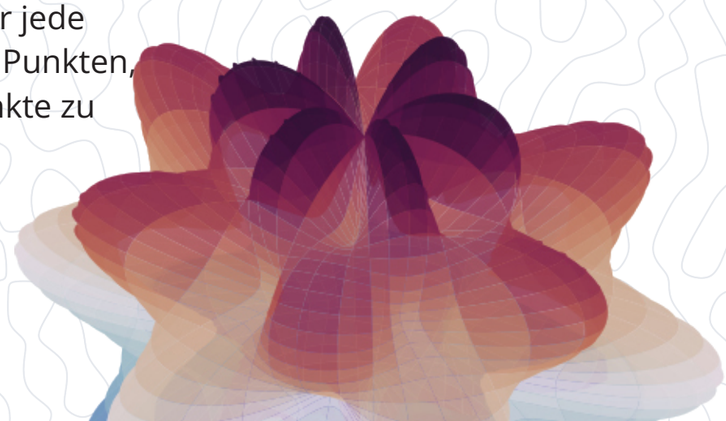
$$y^2 + xy =$$

$$x^3 - 12847277641135677282817976360157847688667076814158492621572242320 63x + 560368321454261339256859338901915312332769858684945406858043869199456710681989058863306170127006181$$

Legenden besagen, dass bei der dreifachen Nennung dieser elliptischen Kurve der Geist von Andre Weil spawnt.

Der analytische Rang ist eng mit der Riemannschen Vermutung verbunden, die in der letzten Ausgabe thematisiert wurde. Denn es handelt sich um L-Funktionen.

L-Funktionen? So mancher wird sich denken “endlich wird mein Leben auch mathematisch beschrieben”, doch heute geht es statt um euer trauriges Dasein vielmehr um die unendliche Summe von Exponenten in Zusammenhang mit einer bestimmten Zahlenkette.



$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

Das Ganze sieht gar nicht kompliziert aus, ist es am Ende aber leider schon.

Auf der linken Seite ist ein L (s, X) zu sehen. Stellen wir uns L(s) vor wie bei jeder normalen Funktion in der Schule, wo f(x) auf der einen Seite der Gleichung steht. Das merkwürdige X ist auf der rechten und der linken Seite der Gleichung zu sehen. Es gibt eine unendliche Kette von Zahlen an, die später noch definiert werden. Der Einfachheit halber werden wir vorerst den Fall nehmen, dass X(n) für jedes n = 1 ist.

Das komisch geformte E symbolisiert die unendliche Summe für n = 1 bis n = unendlich. In jedem Summanden steigt n um 1. Folglich:

$$\frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} \dots$$

Es gibt große Werke über diese unendlichen Summen und ob sie konvergieren (also sich einem endlichen Wert annähern) oder divergieren (also ins Unendliche gehen).

In diesem Fall konvergieren sie immer über dem Wert s=1. Und auch wenn s<1 ist, kommt eine Zahl am Ende heraus.

Das ist aber merkwürdig, denken sich so manche. Denn wenn s negativ ist, würde doch vermutlich die Summe unendlich werden? Ja, würde sie. Daher kommt das Konzept der analytischen Fortsetzung ins Spiel.

Analytische Fortsetzung beschreibt den Prozess, eine Funktion über einen Bereich zu erweitern, wo sie eigentlich gar nicht definiert ist. In unserem Fall divergiert die Funktion bei s ≤ 1. Für diese Werte müssen wir es irgendwie schaffen, diese Funktion zu erweitern.

Wir werden nicht weiter darauf eingehen, wie genau, die Funktion erweitert werden kann, denn das übersteigt unsere Fähigkeiten. Warum? Weil die analytische Fortsetzung so aussieht, wenn für alle n X(n) = 1 gilt:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Wer ein fotografisches Gedächtnis hat, wird diese Funktion aus der letzten Ausgabe kennen, die sich um die Riemannsche Vermutung dreht.

Analytische Fortsetzungen sind ein gängiges Mittel der Mathematik, um Funktionen in Bereichen zu definieren, wo sie eigentlich nicht definiert sind und auch wenn es kontraintuitiv erscheint, gibt es für jede (holomorphe) Funktion nur genau eine analytische Fortsetzung, sprich nur einen Weg, wie die Funktion sich im bisher nicht-definierten Bereich verhält.

Doch was ist denn dieses mysteriöse X(n)? Auch wenn die genaue Berechnung dieser sogenannten Dirichlet-Koeffizienten die Seitenanzahl dieses Käseblattes exorbitant steigern würde, müssen wir uns leider kurz damit befassen.

Denn es gibt noch eine weitere analytische Fortsetzung einer L-Funktion über einen gewissen Zahlenbereich - die Euler-Produkt-Formel.

Hierfür wird der Modulo p von Zahlen von vorhin wieder angewendet. Der Np-Wert setzt sich aus der Anzahl der Lösungen der elliptischen Kurve es auf dem modularen Zahlkörper F_p und eine Ergänzung um + 1 zusammen, sodass das ganze so aussieht:

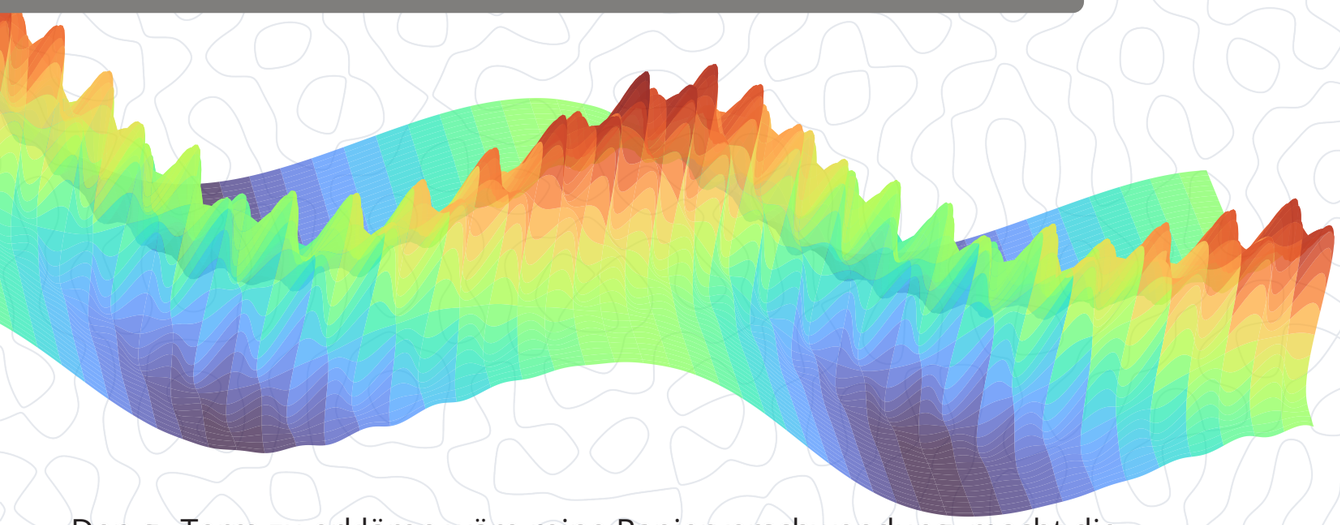
$$L(E,s) = \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{L_p(p^{-s})}$$

Leider ist das ganze noch nicht komplett, so sieht es zum Schluss aus:

$$L(E,s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \underbrace{(p+1-N_p)}_{a_p} p^{-s} + g_p p^{1-2s}}$$

$$N_p = \#E(\mathbb{F}_p) + 1$$

Dieser kompliziert aussehende Ausdruck zählt die Punkte auf einer elliptischen Kurve über einem endlichen Körper



Den g_p-Term zu erklären wäre reine Papierverschwendung, macht die Berechnung aber noch genauer. Der Wert p gibt alle Primzahlen an. Folglich ist beim ersten „Durchlauf“ der Berechnung p=2, dann p=3, usw.

Und hier sieht man ganz einfach, wie aus einer elliptischen Kurve eine L-Funktion generiert wurde, die sogenannte “Hasse-Weil-Zeta-Funktion”. Das hier ist richtig tiefer Scheiss, herzlichen Glückwunsch!

Diese L-Funktion funktioniert wie jede andere, die schon zu Schulzeiten gelehrt wurde - sie hat einen Graphen, sie hat vielleicht Nullstellen und ist ableitbar. Und hier kommen die Ränge der Nullstelle bei s=1 ins Spiel, denn dieser Rang gibt den algebraischen Rang einer L-Funktion an. Sollte es bei s=1 keine Nullstelle geben, hat die L-Funktion den analytischen Rang 0. Gibt es dort eine Nullstelle, wird die Funktion abgeleitet und sofern die Ableitung nicht bei s=1 eine Nullstelle hat, ist der Rang 1. Das ganze lässt sich weiter fortsetzen.

Und hier sind wir endlich bei der Erklärung angekommen: Die BSD-Vermutung sagt aus:

Analytischer Rang = Algebraischer Rang

Also würde das Nullstellenverhalten der L-Funktion aussagen, wie viele rationale Punkte eine dazugehörige elliptische Kurve hat. Bisher wurde hierzu noch kein Beweis oder Gegenbeispiel gefunden, nur von den Rängen 0 und 1 ist bewiesen, dass die BSD-Vermutung stimmt. Und anders als bei der Riemannschen Vermutung ist es auch noch umstritten, ob sie überhaupt korrekt ist. Einige Forschende nehmen auch an, dass der Einsatz von KI zum Fund eines Gegenbeispiels sorgen könnte.

Sollte die Vermutung stimmen, würde sie Mathematiker*innen ein tiefes Verständnis über die Verbindung von verschiedenen mathematischen Gebieten geben. Der Rang einer elliptischen Kurve könnte deutlich einfacher berechnet werden. Vor allem im Bereich der Algorithmen könnte hier die BSD-Vermutung große Fortschritte machen. Und hier setzt auch die Geschichte an. Denn die Vermutung war das erste größere mathematische Problem, an dem mit Computern gerechnet wurde. Was wäre es schön, wenn ein Beweis diese Algorithmen, die damals die Computer antrieben, weiterbringen würde.

Die G´s der Mathematik

George Green

In dieser Kategorie von Trivial geht es um Mathematikerinnen und Mathematiker, deren Nachname mit G beginnt. Natürlich hätte man auch jeden anderen Buchstaben nehmen können, nur leider hätte sich dann keine so tolle Überschrift ergeben.

Der G dieser Ausgabe ist: George Green.

George Green ist kein Name der Physik wie Newton oder Einstein. Viele Physikerinnen und Physiker lernen zwar die Greenschen Funktionen oder die Greenschen Formeln kennen, haben aber oft keine Ahnung, wer der Mann hinter ihnen ist.

Aber wer war George Green?

George Green wurde 1793 in Nottingham geboren. Seine akademische Ausbildung war recht kurz. Bereits im Alter von neun Jahren nahm sein Vater ihn aus der Schule, da er größere Aufgaben hatte: Die Arbeit in der Windmühle. Währenddessen lernte er im Eigenstudium die Grundlagen der Physik. Dafür nutzte er die Nottinghamer Abonnementbücherei, die ihm die Werke von zum Beispiel Laplace und Lagrange besorgte. Über 20 Jahre verbrachte Green seine Tage damit, Getreide zu schleppen und Zahnräder zu fetten. Währenddessen las er aber auch die neuesten physikalischen Entdeckungen aus Frankreich, während viele andere in England noch immer an Newtons Formalismus für Integral- und Differentialrechnung hingen.

Der Aufstieg zum Physiker

Im Alter von 35 Jahren veröffentlichte er seine erste Publikation. In diesem über 80 Seiten langen Epos bewies er viele der Sätze, für die Physikerinnen und Physiker ihn heute kennen. Allerdings ging diese Veröffentlichung vollkommen unter. Kaum jemand hatte die Originalveröffentlichung gelesen. Durch den britischen Mathematiker Edward Bromhead gelangen wenigstens die Resultate selbst zu einem kleinen Teil der damaligen Fachkreise.

Im Alter von 40 Jahren begann George Green ein Studium der Mathematik und Physik und schloss dieses 3 Jahre später mit Auszeichnung ab. Und das obwohl er währenddessen weiterhin die Familienmühle betrieb. Nach seinem Abschluss publizierte er über viele verschiedene Bereiche der Physik.

Alles ist ein einziger Satz

Jemals vom Satz von Gauß, Satz von Stokes oder Satz von Green gehört? All das sind nur Spezielfälle von diesem elegentan Einzeiler:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

Leider verstarb er bereits im Alter von 47 an einer schweren Grippe. Sein Tod wurde zu diesem Zeitpunkt in Fachkreisen kaum wahrgenommen. Erst fünf Jahre nach seinem Ableben im Jahr 1846 wurde George Green “wiederentdeckt”. Der britische Physiker William Thomson (den die meisten unter dem Namen Lord Kelvin kennen) entdeckte durch Zufall während seines Studiums die Arbeiten von Green. Er erkannte sofort die Genialität und reiste durch die Welt, um der physikalischen Elite der Zeit die Schriften zu zeigen. Das führte dazu, dass ab 1850 Greens erste Veröffentlichung erneut publiziert wurde. Dadurch kam diese Arbeit auch zu James Clerk Maxwell, welcher sie als Grundlage für seine Gleichungen zur Elektrodynamik benutzte.

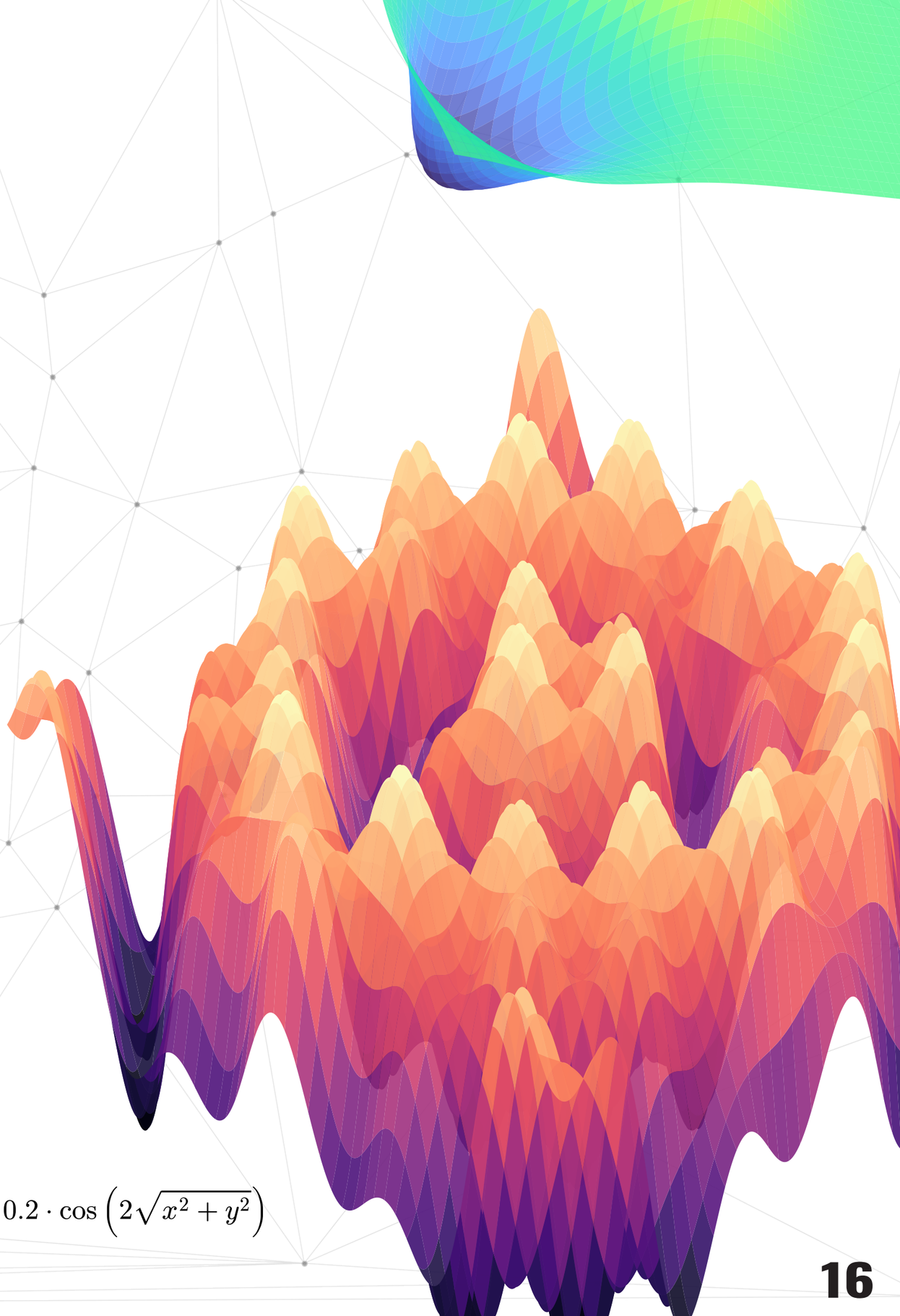
Sein Nachleben

Auch in den Jahrzehnten danach wurde George Green noch geehrt:

Als Albert Einstein sein Grab besuchte, sprach er davon, dass Green der Wissenschaft mindestens 20 Jahre voraus gewesen sei.

Im Jahr 1993, also 152 Jahre nach Greens Tod, wurde ihm in der Westminster Abbey eine Gedenktafel gewürdigt. Lustigerweise musste dafür die von seinem größten Fürsprecher Lord Kelvin etwas zur Seite gerückt werden.

George Green wusste zu seinen Lebzeiten noch nicht, was für Ehrungen ihn noch erwarten würden, da er sie selbst nie miterlebte. Er hat sein Leben lang kaum Anerkennung für sein Lebenswerk erhalten und hat trotzdem nie aufgegeben.

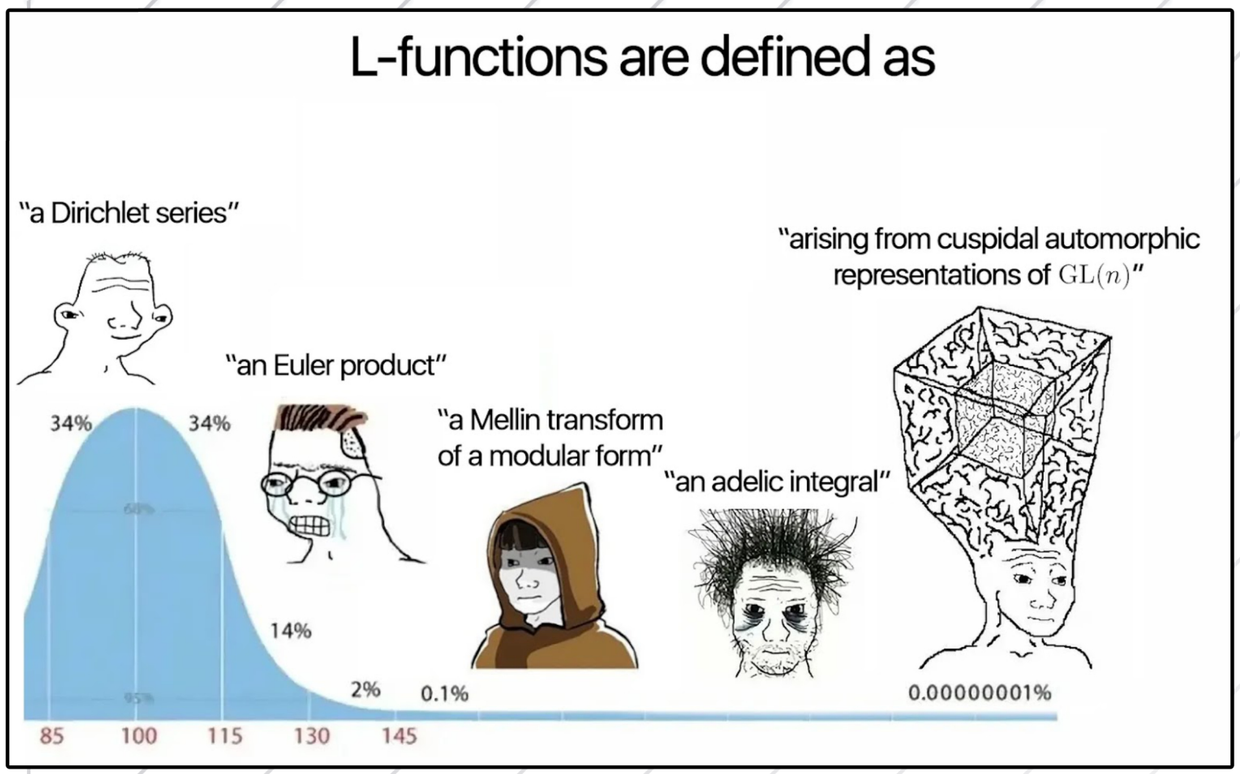


$$f(x,y) = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 0.5 \cdot \cos(1.5x) \cdot \sin(1.5y) + 0.2 \cdot \cos\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Lustige Witzbilder

L Funktionen

Jeder weiß: Ein Witz wird lustiger, wenn man ihn erklären muss. Deswegen wird in dieser Rubrik ein lustiges Bild aus dem Internetz genommen und es erklärt.



Dieses wunderschöne Witzbild nimmt das klassische Bell-Curve Meme und entwickelt es weiter. Anstatt nur drei Vertreter im Bild zu haben, sind es sogar fünf. Das hat den ersten lustigen Nebeneffekt, dass der eigentlich ganz linke Wojak komplett fehlt. Vermutlich eine Anspielung darauf, dass für die unteren Prozente das L in L-Funktionen für Looser steht.

Aber warum ist das lustig?

Der erste Eintrag würde L-Funktionen als Dirichlet Reihe definieren. Das ist vermutlich auch die erste Art wie den meisten Menschen zum ersten Mal der Begriff L-Funktion unterkommt.

Gerade wenn man sich zum ersten Mal mit der Riemannschen Vermutung beschäftigt trifft man garantiert auf diese Begriffe. Auch wenn für die Zeta-Funktion alle Dirichlet-Koeffizienten stump eins sind.

Der nächste Eintrag könnte auch noch einigen bekannt sein, vor allem wenn Sie den Artikel über BSD-Vermutung in dieser Ausgabe gelesen haben (wenn nicht, nachholen). Hier ist eine L-Funktion keine unendliche Summe, sondern ein unendliches Produkt über alle Primzahlen. Auch das könnte Leserinnen und Lesern aus dem Artikel über die Riemannsche Vermutung aus der ersten TRIVIAL™ Ausgabe bekannt sein.

Mit dem dritten Eintrag begeben wir uns lansam in unbekanntes Territorium für TRIVIAL-Leserinnen und Leser. Modulformen und irgendwleche Integraltransformationen kamen bisher noch in keiner Form vor (aber auch das wird sich noch ändern). Der Wojak im Mönchsgewand zeigt aber gut, dass wir mittlerweile erleuchtet sind. Wir befinden uns jetzt nämlich nicht mehr in längst vergangenen Zeiten und bei Dingen mit den Eulern schon rumgedoktort hat, sondern bei der modernen arithemtischen Geometrie. Hierbei ist die Mellin Transformationen so eine Art Gigachad Variante der Fourier-Transformation (wobei Gigachad hier auch als multiplikativ gelesen werden kann).

Die Mellin-Transformation ist die direkte Brücke zwischen der Exponentialfunktion und L-Funktionen. Wendet man die Mellin-Transformation auf die elementare Funktion $\frac{1}{e^x-1}$ an, erhält man wie aus dem Nichts das Produkt aus Gammafunktion und Riemannscher Zeta-Funktion

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x-1}\right\}(s) = \Gamma(s)\zeta(s)$$

Der vierte Eintrag zeigt einen verstörten Wojak. Dies könnte eine Referenz auf das berühmte Witzbild von Max Planck mit “Vor und Nach Quantenphysik sein”. John Tates bewies 1950, dass sich L-Funktionen über den Adelering eines Zahlkörpers als Fourier Transformation schreiben lassen können. Allerdings ist die Funktionalanalysis auf topologischen Ringen etwas, was sich selbst der TRIVIAL™ Redaktion entzieht, weswegen das hier so stehen gelassen wird, um wenigstens den Anschein zu erwecken wir würden wissen worüber wir reden.

Die finale Eintrag ist laut dem Meme nur den aller obersten Prozentpunkten des IQ-Spektrums vorenthalten. Da TRIVIAL™ allerdings für die Zugänglichkeit von Mathematik kämpft hier ein kleiner Abriss was einen erwartet:

Wenn man sich L-Funktionen im Rahmen des Langlands-Programm betrachtet, sind L-Funktionen ein Objekt, das einer irreduziblen, kuspidalen automorphen Darstellung der allgemeinen linearen Gruppe über den Adelen zugeordnet wird. Das lustige daran ist, dass der Wojak einen Tesserakt als Kopf hat. Dies kann man als Sinnbild für die Mehrdimensionalität der algebraischen Zahlentheorie sehen.

TRIVIAL gibt es jetzt auch Online

Auch die TRIVIAL-Redaktion ist im 21. Jahrhundert angekommen und hat jetzt eine Webpräsenz. Unter https://trivial-magazin.de/ oder dem QR Code kann man jetzt ALLE Ausgaben lesen und vielleicht sogar ein paar Inside-Top-Secret Informationen abgreifen.



Die Formel der Ausgabe

Zählen von Dreiecken

Die pq-Formel, jeder kennt sie. “x ist minus p halbe plus minus die Wurzel aus p halbe zum Quadrat minus q”, wie Dorfuchs singen würde. Auch die Mitternachtsformel, welche ähnlich aufgebaut ist und international weit verbreiteter ist, ist für die Lösung von quadratischen Gleichungen beliebt. Mehrere Kulturen wussten um die Lösung von quadratischen Gleichungen, als erstes vermutlich die Babylonier ca. um 2000 v. Chr.

Doch auch in anderen Gegenden ist sie aufgetaucht, in ihrer jetzigen Form wurde die Formel aber erst mutmaßlich 600 n. Chr. niedergeschrieben und bewiesen. Dies liegt vermutlich auch daran, dass erst die antiken Griechen begannen, die Mathematik als Wissenschaft zu sehen und Dinge fein säuberlich zu beweisen.

In der Fachwelt heißen quadratische Gleichungen auch Polynom 2. Grades. Doch auch Polynome 3. Grades existieren, sogenannte kubische Gleichungen. Auch hierfür gibt es eine Formel, die allerdings schon zwei Zeilen umfasst.

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)-\sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}.$$

Die im Text erwähnte "Mitternachtsformel" zur Lösung quadratischer Gleichungen verdankt ihren Spitznamen dem bekannten Lehrerscherz, dass Schüler diese Formel so gut beherrschen müssen, um sie selbst dann fehlerfrei aufsagen zu können, wenn man sie mitten in der Nacht aus dem Tiefschlaf reißt.

Die Formel auf dieser Seite wurde im 16. Jahrhundert von Lodovico Ferrari entdeckt als dieser gerade einmal 18 Jahre alt war.

Ihre Entdeckung ist insofern spannend, da das erste Mal Wurzeln aus negativen Zahlen auftraten - die imaginären Zahlen. Auch ist das vermutlich das erste Mal, dass Wurzeln in Wurzeln auftraten. Die Geschichte zur Erfindung der Formel ist voller Intrigen und Duelle, eine Beschäftigung alleine auf einer historischen Ebene ist interessant. Die Formel selbst wurde im frühen 16. Jahrhundert in Italien entdeckt und weckte Interesse für weitere Erfindungen.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Die allgemeine Form eines Polynom 4. Grades

$$-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}-g-\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}$$

$$-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}-g-\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}$$

$$-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+g-\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}$$

$$-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+g-\frac{\sqrt[3]{2}(b^2-3ac+12d)}{3f}}$$

$$e = \sqrt{(2b^3-9acb-72db+27c^2+27a^2d)^2-4(b^2-3ac+12d)^3}$$

$$f = \sqrt[3]{2b^3-9acb-72db+27c^2+27a^2d+e}$$

$$g = \frac{-a^3+4ba-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{f}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}\,(b^2-3ac+12d)}{3f}}}$$

Aus Platz- und Lesefluss-Gründen ersparen wir euch die Erklärung einer Formel für ein Polynom 4. Grades, denn bei diesem vergeht einem glatt der Spaß an der Mathematik, würde man denken, doch ist es genau andersrum. Aufmerksame Leser*innen von TRIVIAL haben schon häufig gehört, dass eine Formel kompliziert und unschön sei, bisher wurden diese aber immerhin noch abgebildet. Die halbseitige Ausgeburt der Hölle wurde nur wenige Jahre nach der Veröffentlichung der Lösung für ein Polynom 3. Grades veröffentlicht und basiert auf der vorherigen Formel.Und dann folgte bestimmt auch schnell die Gleichung für ein Polynom 5. Grades, oder? ODER?

Nein, die ließ gut 200 Jahre auf sich warten. Und das Ergebnis kam ganz anders als erhofft. Denn der französische Mathematiker Abel bewies im Jahr 1824 auf Basis des lückenhaften Beweis von Ruffini, dass mit einer endlichen Anzahl von Wurzeln Polynome 5. Grades oder höher nicht gelöst werden konnten. Der ebenfalls französische Mathematiker Galois verfasste 1832 im Alter von 20, einen Tag vor seinem Tod in einem Duell, eine allgemeine Theorie dazu, die auch noch heute als Galois-Theorie bekannt ist.

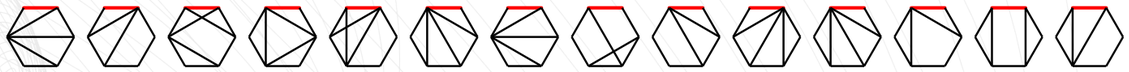
Aber gibt es dann einfach keine Wege zur Lösung für solche Gleichungen? Das wäre ja traurig, denn Polynome 5. Grades oder höher können durchaus auch in der Mathematik auftreten. Ja, es gibt keine generelle Formel. Und dennoch gibt es komplizierte und aufwendige Wege (deutlich komplizierter als die Formel für die Gleichung 4. Grades!), um sich zumindest dem Wert anzunähern. Und hier gab es im letzten Jahr einen großen Durchbruch, durch den die Berechnungen solcher Gleichungen deutlich schneller ist.

Denn durch den Beweis von Abel und Galois wissen wir, dass nur durch Wurzeln und einfache Operatoren (+, -, x, :) selbst keine Lösung solcher Gleichungen bestimmt werden kann. Doch mithilfe von unendlichen Summen lässt sich ein Ergebnis bestimmen, wie die Mathematiker Norman Wildberger und Dean Rubine im Mai herausgefunden haben. Und diese Lösung hat es in sich. Mathematisch wird folgendes Thema zutiefst spannend, da eine Verbindung weit entfernter Gebiete der Mathematik aufgezeigt wird. Leider können wir den Beweis nicht in seiner vollen Gänze und Schönheit zeigen, sondern beschreiben nur grob die mathematische Vorgehensweise. Bei weiterem Interesse ist unten noch weiteres Material verlinkt.

Während bisherige Formeln nur für die Lösung einer Gleichung galten, kann diese Formel Polynome jeden Grades lösen. Ein gigantischer Durchbruch in der Algebra also.

$$\alpha = \sum_{m_2, m_3, \ldots} \frac{(2m_2 + 3m_3 + \ldots)!}{(1 + m_2 + 2m_3 + \ldots)! \cdot m_2! m_3! \ldots} (t_2^{m_2} t_3^{m_3} \ldots)$$

Und hier kommen wir zu den sogenannten Catalan-Zahlen. Ein Sechseck lässt sich insgesamt auf 14 unterschiedliche Wege in Dreiecke unterteilen (während eine Seite immer oben ist), die 4. Zahl der Catalan-Folge ist also 14.



Euler hatte diese Zahlen 1751 erfunden, doch der Mathematiker Catalan hat 1838 dazu erst eine passende Formel erstellt:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Diese Folge hat die Stellen 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429... und so weiter.

Diese Catalan-Zahlen, die eigentlich nichts mit quadratischen Gleichungen etwas zu tun haben, sondern nur Dreiecke in n-Ecken zählen, sind also doch damit verwandt. Kurios

$$\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, t^n = \sum_{n \geq 0} C_n t^n.$$

$$1 - \alpha + t\alpha^2 = 0$$

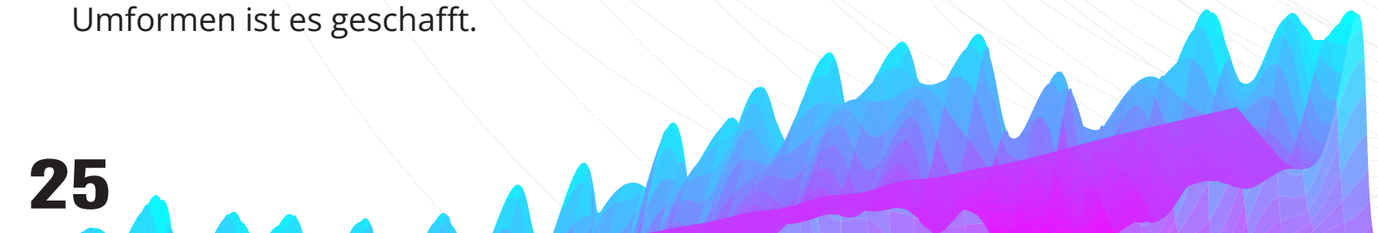
Die Einzelheiten lassen sich unter folgendem Video genauer verstehen für alle, die nicht bereits von den Formeln bisher abgeschreckt sind.

The Bi-Tri array $C[m_2, m_3] = \frac{(2m_2+3m_3)!}{(1+m_2+2m_3)!\, m_2!\, m_3!}$

m_2 \ m_3	0	1	2	3	4	5
0	1	1	3	12	55	273
1	1	5	28	165	1001	6188
2	2	21	180	1430	10920	81396
3	5	84	990	10010	92820	813960
4	14	330	5005	61880	678300	6864396
5	42	1287	24024	352716	4476780	51482970
6	132	5005	111384	1899240	27457584	354323970
7	429	19448	503880	9806280	159352050	2283421140

Da diese Formel auch divergieren kann, wenn t > 0,25 ist, muss hier der Wert gegebenenfalls erweitert werden, das Thema würde den Rahmen jedoch sprengen. Aber es geht noch weiter. Denn wenn wir ein n-Eck in Dreiecke aufteilen können, dann können wir es ja auch in Vierecke, Fünfecke, usw... aufteilen. Diese Zahlen werden Hyper Catalan Numbers genannt, Wildberger hat sie hierfür entworfen. Für diese Zahlen gibt es die Zahlen m_2, m_3, m_4 usw..., wie die beiden Mathematiker definiert haben. Mit m_2 werden die Dreiecke, mit m_3 die Vierecke usw. angegeben. Natürlich lässt sich das auch kombinieren. Ein Fünfeck beispielsweise kann ein Viereck und ein Dreieck beinhalten. Für diese verschiedenen Kombinationen lassen sich gigantische Tabellen anordnen, dieses mathematische Phänomen wurde die Geode getauft. Diese Tabelle gibt beispielsweise die verschiedenen Kombinationen für Drei- und Vierecke an:

Oben in der Tabelle ist auch die Formel für die Catalan-Zahlen angegeben. Diese macht einen Großteil der ursprünglichen Formel zur Berechnung aus. Lediglich die t-Werte müssen hier noch eingefügt werden und mit ein wenig Umformen ist es geschafft.



Zuletzt muss ein Wert grob geschätzt und in die Formel eingesetzt werden, dieser wird nach und nach durch die Ergebnisse der Gleichung korrigiert. Dies ist extrem beeindruckend, denn wenn man diesen Prozess nur zweimal durchläuft, ist der Wert bereits auf 16 Nachkommastellen genau. Das schafft bei einem Polynom 3. Grades vielleicht noch ein Taschenrechner recht gut, doch später wird es immer schwieriger. Dieser Prozess könnte aber vor allem auch die Grundlage der Berechnung solcher Polynome durch Taschenrechner ersetzen.

Doch was können wir aus dieser Entdeckung lernen? Erstmal haben wir jetzt eine Formel zur Bestimmung von Polynomen beliebigen Grades und auch wenn ein Polynom 3. oder 4. Grades mit der herkömmlichen Formel weiterhin vermutlich einfacher zu berechnen ist, sind die Anwendungen später gigantisch. Auch setzt es einen neuen Ansporn: Auch wenn die Algebra schon weit erforscht ist, gibt es immer neue Dinge zu finden. Die Geode birgt spannende Strukturen und bestimmt gibt es dort noch viel mehr zu entdecken! Neue ähnliche Gebilde und Formen können uns weiterhin helfen, die Welt der Mathematik besser zu verstehen. Auch Wildberger selbst hat weiteres Interesse bekundet, wie sich dahingehend die Mathematik wandeln könnte.

Es ist bereits bekannt, dass sich bestimmte Werte der Zeta-Funktion mit Catalan-Zahlen darstellen lassen und es gibt auch eine Schreibweise der Funktion mit Catalan-Zahlen. Führt die Entdeckung der Hyper-Catalan-Numbers vielleicht noch weiter und hilft uns, tiefe Zusammenhänge in der Mathematik zu verstehen?

Zuletzt ist diese Entdeckung aber auch ein Aufruf, Dinge zu hinterfragen und um die Ecke zu denken. Denn trotz des Beweises durch die Galois-Theorie, welcher eine Lösung des Polynoms 5. Grades durch einfachere Operationen für nicht möglich erklärt, haben Wildberger und Rubine sich diesem Problem angenommen und um diesen Beweis herum gedacht - mit Erfolg!

Für die interessierten Leser*innen kann ich nur eine weitere Beschäftigung mit Wildbergers YouTube-Kanal „Insights into mathematics“ empfehlen. Nicht nur hat er in 1,5 Stunden seinen Beweis erklärt und ein weiteres ausführliches Video über die Geschichte dahinter gemacht - und auch abseits dieses Durchbruches sind seine Videos von wichtigem wissenschaftlichen Gehalt.

Underrated

Der wichtigste Name der Mathematik

In dieser Rubrik soll es um Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen gehen, die verhältnismäßig bekannt sind, aber bei weitem nicht als die relevante Person angesehen werden, die sie eigentlich sind

Ein alter Witz der Mathematik ist, dass alles nach Euler benannt ist. Wenn es das nicht ist, ist es nach der Person benannt, die es nach Euler entdeckte. Ein Blick in die zbMATH-Bibliothek verrät allerdings, Euler ist bei weitem nicht der am häufigsten genannte Name in mathematischen Veröffentlichungen. Diese Ehre gebührt dem polnischen Mathematiker Stefan Banach.

Über ihn kursieren allerlei Gerüchte und lustige Geschichten. Dieser Artikel möchte den wahren Geschichten eine Bühne geben und die Gerüchte aus der Welt schaffen - eine Art mathematisches Mythbusters.

Stefan Banach - In Kürze

1892 in Krakau geboren, im Alter von 4 Tagen von der Mutter verlassen, später auch vom Vater. In seiner Pflegefamilie lernte er Französisch und autodidaktisch Latein. Gilt seit seiner frühen Schulzeit als mathematisch hochbegabt. Setzt sich bereits früh mit höherer Mathematik auseinander, entscheidet sich aber nach seinem Schulabschluss ein Ingenieurstudium anzustreben. Er hielt die Mathematik zu diesem Zeitpunkt für vollständig und bereits gelöst.

Hab ich da etwa Lebesgue gehört?

Eines Tages unterhielt sich Stefan Banach mit seinem Freund Otto Nikodym in einem Krakauer Park über Mathematik. Der polnische Mathematik Professor Hugo Steinhaus kam an ihnen vorbei und überhörte die Wörter “Lebesgue-Integral”. Er gesellte sich zu ihnen und merkte schnell, dass er zwei äußerst talentierte Leute vor sich hatte. Er erzählte ihnen von einem Problem, an dem er arbeitete. Banach kam bereits nur einige Tage später zu ihm mit einer vollständigen Lösung.

Von dieser Geschichte gibt es einige Varianten. Steinhaus selbst erzählte sie manchmal so, dass er “Lebesgue-Integral” hörte, manchmal allerdings “Lebesgue-Maß”. Vielleicht war es beides, das lässt sich heute nicht mehr sagen. Steinhaus verbreitete nach dem Tod von Banach außerdem noch viele andere Unwahrheiten über Banach wie falsche Geburtsdaten, inkorrekte Namen der Eltern und wie er aufgewachsen ist.

Der Mathematiker Waclaw Sierpinski, der die anwesenden Mathematiker später gut kennenlernte, erzählte die Geschichte aber andersrum. Angeblich habe Banach das Gespräch überhört und sich dann eingemischt. Diese Fassung ist aus verschiedenen Gründen falsch, Sierpinski bringt hier einiges durcheinander.

Der Mythos mit der Bank ist allerdings wahr, es gibt in Krakau sogar eine Bronzestatue von der Situation im Stadtkern.

Steinhaus

Obwohl Banach keine mathematische Ausbildung hatte, veröffentlichte er zusammen mit Steinhaus seine Entdeckung. Steinhaus sagte später, dass seine größte mathematische Entdeckung die Entdeckung von Banach war.

Auch Banachs beiden frühen Mitstreiter, Otto Nikodym und Witold Wilkosz, wurden noch einflussreiche Mathematiker.

Das schottische Café

Banach war das komplette Gegenteil des Klischees vom ruhigen, allein arbeitenden Mathematiker. Er verbrachte viel Zeit im schottischen Café, einem Café in Lemberg mit anderen Mathematikinteressierten. Dabei kritzelten sie viele ihrer Überlegungen auf Servietten oder schrieben sie direkt auf die Tische. Da das Personal diese Tische abwischte oder die Servietten wegwarf, gingen so vermutlich unzählige Ideen verloren. Deswegen kam die Idee auf, ein Buch im Café zu hinterlegen, in welchem man Ideen festhalten könne. Dieses wurde nur auf Nachfrage herausgegeben und in diesem befinden sich unzählige mathematische Beweise. Aber auch viele Probleme und Fragestellungen die in der Regel mit einer Art Preis ausgeschrieben wurden. Diese waren beispielsweise ein Kaffee oder eine lebende Gans (die lebende Gans wurde 1972 feierlich an den schwedischen Mathematiker Per Enflo übergeben).

Die Historie des schottischen Buches

Bisher spielte sich unsere Geschichte vor dem Beginn des zweiten Weltkriegs ab. Leider hatte dieser auch einen vernichtenden Einfluss auf die Welt der Mathematik, vor allem die der polnischen Mathematik.

Das schottische Buch selbst wurde bis zum 31.5.1941 weitergeführt. Es gibt Gerüchte, dass Banach es vergraben haben soll, um es vor Luftangriffen zu schützen.

Gesichert ist allerdings, dass der Sohn von Stefan Banach, Stefan Banach Jr. das Manuskript nach dem Krieg nach Polen nahm, wo Hugo Steinhaus eine präzise Abschrift des Buches anfertigte. Diese Abschrift schickte er an Ulam in die USA, welcher es dort verbreitete und international bekannt machte.

Das Original befindet sich heute weiterhin im Besitz der Familie Banach.

Während des Krieges

Auch nach dem Einmarsch der Roten Armee 1939 blieb Banach Dekan der Mathematisch-Physikalischen Fakultät in Lemberg. Als bekannt wurde, dass seine Heimatstadt von den Deutschen besetzt wurde, brach Banach seine Reise, auf der er zu dem Zeitpunkt war, ab und kehrte nach Lemberg zurück. Unter der deutschen Besatzung verlor er allerdings seine Stelle an der Universität und musste teilweise Blut für die Fleckfieberforschung spenden, um Geld für seine Familie zu verdienen. Als die Rote Armee ab 1944 Lemberg besetzte, erhielt Banach seine Stelle als Professor zurück. Leider starb er am 31.8.1945 an Lungenkrebs. Dazu sei gesagt, dass er sein Leben lang mehrere Päckchen Zigaretten am Tag rauchte.



$$A = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A)$$

Durch den Banachschen Fixpuntksatz kann man Fraktale wie dieses erstellen

Der Mythos seines Doktortitels

Die wohl bekannteste Geschichte über Banach ist die, wie er seinen Doktortitel bekam. Sie ist auch außerhalb der mathematischen Welt oft zitiert und gelangte sogar in ein Buch über Phobien. Die Geschichte besagt, dass Banach keinen Sinn darin sah, eine Doktorarbeit zu schreiben und eine Prüfung zu absolvieren. Die Universität habe ihn wohl immer wieder unter Druck gesetzt, aber er weigerte sich. Deswegen schrieb jemand anderes Ideen auf, die von Banach kamen. Dies war dann seine Doktorarbeit. Für seine Prüfung sei er wohl in eine Falle gelockt worden. Ein Kollege lockte ihn zu einem Meeting, in welchem es um Mathematik ging. Banach beantwortete alle Fragen, die aufgekommen waren. Ihm wurde dann die Hand gereicht und zum Doktortitel gratuliert.

Allerdings ist diese Geschichte vollkommen frei erfunden. Es gibt eine Menge Beweise, die diese Geschichte in jeglicher Hinsicht entkräften. Beispielsweise liegt Banachs Doktorarbeit vor, die nachweislich von ihm geschrieben wurde. In dieser ist beispielsweise der Banach-Raum eingeführt worden, als auch der Banachsche Fixpunktsatz. Zwei äußerst bedeutende mathematische Entdeckungen.

Außerdem schrieb er diese Arbeit wenige Monate nachdem er anfing an der Universität zu arbeiten. Es gab also keinen Grund seitens der Universität, ihn unter Druck zu setzen. Hinzu kommen noch viele weitere Beweise, die einen äußerst präzisen Zeitstrahl konstruieren, wodurch eindeutig gezeigt wird, dass diese Geschichte vollkommen frei erfunden ist.

Bekanntlich ist aber in jedem Mythos ein Fünkchen Wahrheit. Die TRIVIAL-Redaktion hat also keine Kosten und Mühen gescheut, um dem noch weiter auf den Grund zu gehen. Und es stellt sich heraus, die Geschichte über Banach ist zwar nicht wahr, allerdings trifft sie auf einen anderen Mathematiker zu - und zwar Banachs alten Freund Otto Nikodym. Genau dem Otto Nikodym, der neben Banach auf der Parkbank saß und sich mit ihm über das Lebesgue-Maß (oder Integral) unterhielt.

Es scheint, als hätte Nikodym die Geschichte seiner eigenen Dissertation dem Mönch Andrzej Turowicz so wirr erzählt, dass dieser dachte, dass es sich um eine Geschichte von Banach handelte.

Pi doch nicht so konstant?

Pi ist der Umfang eines Kreises geteilt durch seinen Durchmesser. Ein Kreis ist im mathematischen Sinne die Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben. In unserer alltäglichen Sprache ist es klar ersichtlich, was ein Kreis ist.

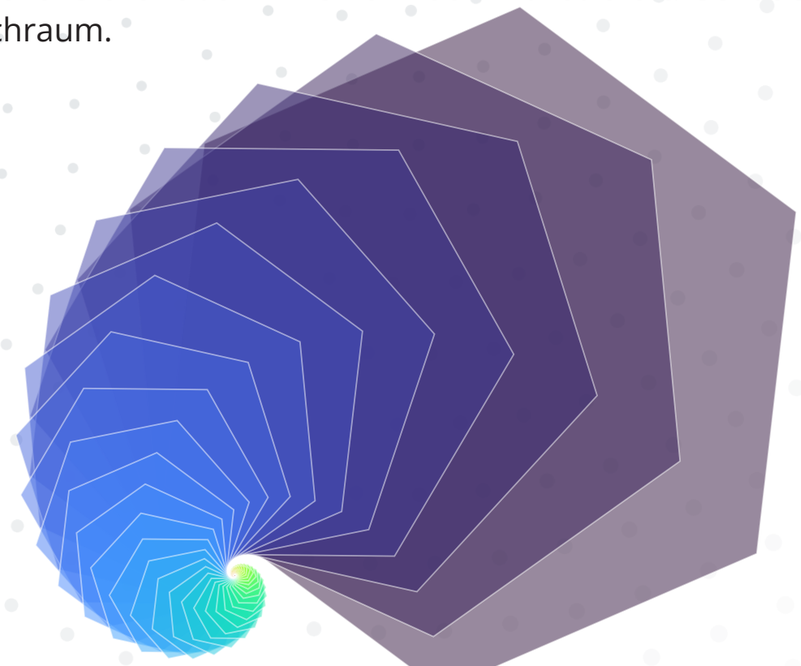
Wenn man allerdings unseren mathematischen Alltag verlässt und sich in die Welt der Maßtheorie begibt, kann man geometrische Objekte wie Kreise vollständig neu auslegen.

Dafür werfen wir einen kurzen Blick auf die Taxi-Geometrie (auch Manhattan-Metrik genannt):

Stell dir vor, du bist ein Taxifahrer in Manhattan. Dann kannst du nicht diagonal durch Häuserblöcke fahren, sondern nur entlang von Straßen. Also hoch/runter bzw. rechts/links. Der Abstand zwischen zwei Punkten (x_1,y_1) und (x_2,y_2) ist also $d=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.

In diesem System sieht ein “Kreis” aus wie ein auf die Spitze gestelltes Quadrat. Somit hat ein “Kreis” mit Radius 1 in diesem System einen Durchmesser von 2 und einen Umfang von 8. Das Verhältnis daraus ist 4. Somit ist in diesem System Pi gleich 4.

Diese Art, neue Systeme zu konstruieren, stammt von Stefan Banach. Aus mathematischer Sicht haben wir einen Raum konstruiert. Genauer gesagt einen Banachraum.



Das mathematische Schinkensandwich

Das Schinkensandwich-Theorem klingt zwar nach Mittagspause, ist aber ein fundamentales Resultat der algebraischen Topologie.

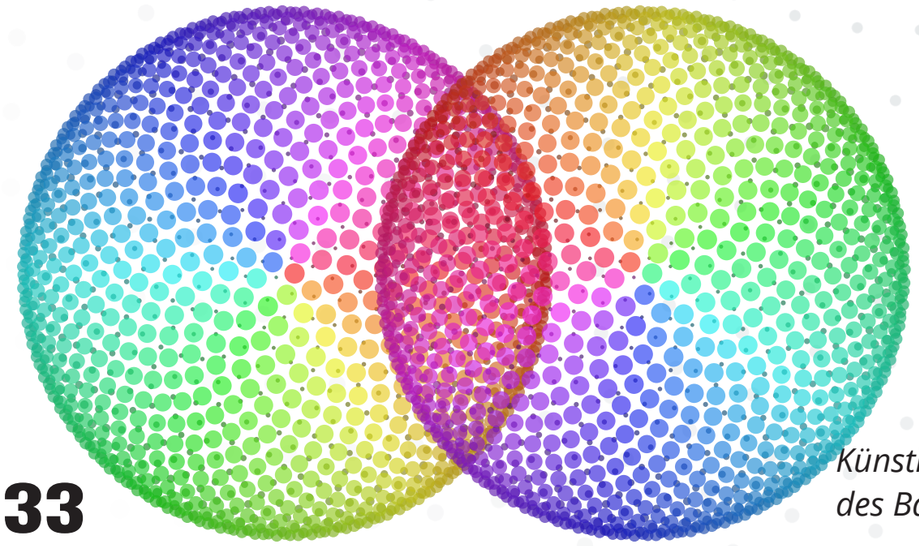
Man stelle sich ein Schinkensandwich vor, bestehend aus Brot, Schinken und Käse. Das Theorem besagt, dass man mit einem einzigen geraden Schnitt das Sandwich perfekt halbieren kann, also dass auf beiden Hälften die exakt gleiche Menge jeder Zutat ist. Banach bewies diesen Satz nicht nur in drei Dimensionen, sondern in beliebigen Dimensionen.

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Auch bei dieser mathematischen Berühmtheit ist Stefan Banach Namensgeber. Das Theorem besagt, dass es möglich ist, zwei solide Kugeln so zu zerlegen, dass man aus den entstandenen Einzelteilen zwei exakt identische Kopien der ursprünglichen Kugel wieder zusammensetzen kann.

Es klingt für viele, gerade nicht Mathematikerinnen und Mathematiker, absolut widersprüchlich. Klonen von Gegenständen - etwas, das physikalisch offensichtlich unmöglich ist - sollte nicht durch Mathematik bewiesen werden können. Dass das gar nicht der Fall ist, bekommt in der Zukunft noch seinen eigenen Artikel

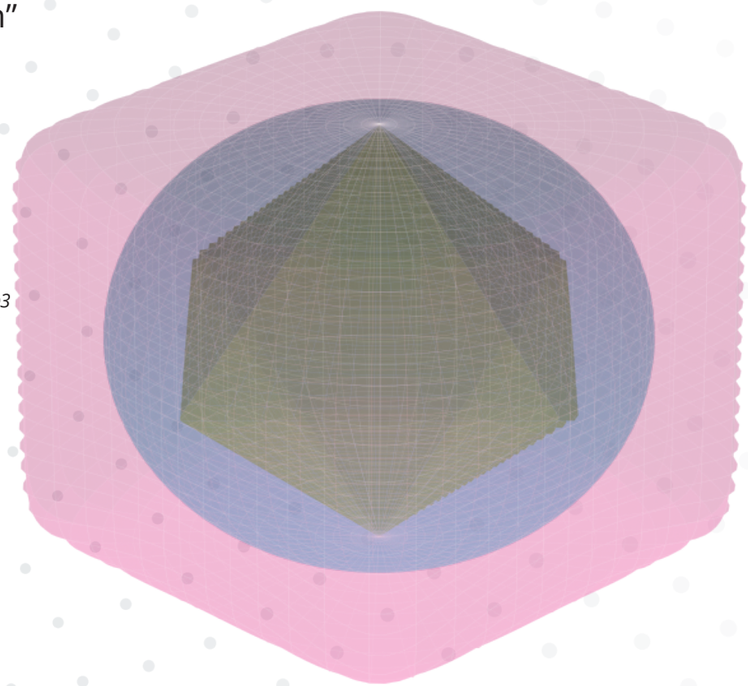
Da das Auswahlaxiom essenziell für den Beweis dieses Theorems ist, wird es deswegen von einigen als untragbar für die Mathematik gesehen.



Künstlerische Interpretation des Banach-Tarski-Paradoxon

Der Banach Raum

Der Legende nach fanden einige Mathematiker heraus, dass es eine Banach-Straße in Krakau geben sollte. In den Tagen vor Google Maps besorgten sie sich also eine Wegbeschreibung. Dort angekommen, fanden sie aber keine nach Banach benannte Straße. sondern einfach Leere. Daraufhin soll einer von ihnen gesagt haben :”Das ist nicht die Banach-Straße, dies ist der Banach-Raum”



Darstellung der Einheitskugeln des R^3 bezüglich der l_1-, l_2- und l_{10}-Norm.

DER Name

Die zbMATH Open ist die größte Liste an mathematischen Publikationen. In ihr wird jedes veröffentlichte Paper namentlich aufgeführt. Wie eingangs schon erwähnt, wird Euler als der Name in der Mathematik gehandelt. Zum Zeitpunkt dieser Recherche wird der Name Euler auch 71867 mal in Titeln erwähnt. Namen wie Gauss oder Leibniz kommen jeweils nur auf 34644 bzw. 18246 Nennungen. Banach hingegen führt ungeschlagen die Liste mit 116053 Nennungen an.

Das zeigt, was für eine großen Einfluss Banachs Überlegungen auf die heutige Welt der Mathematik haben. Beispielsweise tauchen Banach Räume in den meisten der heutigen Forschungsgebieten wie Funktionalanalysis, Stochastik oder Differentialgleichungen auf. Aber auch außerhalb der Mathematik haben sie große Bedeutung. So benutzen Physiker, Biologen und Chemiker auch dieses Rahmenwerk, um Fortschritt in ihren jeweiligen Gebieten zu machen.

Wie Chaos die Welt regiert

Hast du dich schonmal gefragt warum die Wetter-App immer nur ein paar Tage vorrausschauen kann? Oder warum niemand beim Billiard einen 10 Bandentreffer zuverlässig trifft?

All diese Fragen hängen mit dem alltäglichen Chaos zusammen, in dem wir uns befinden.

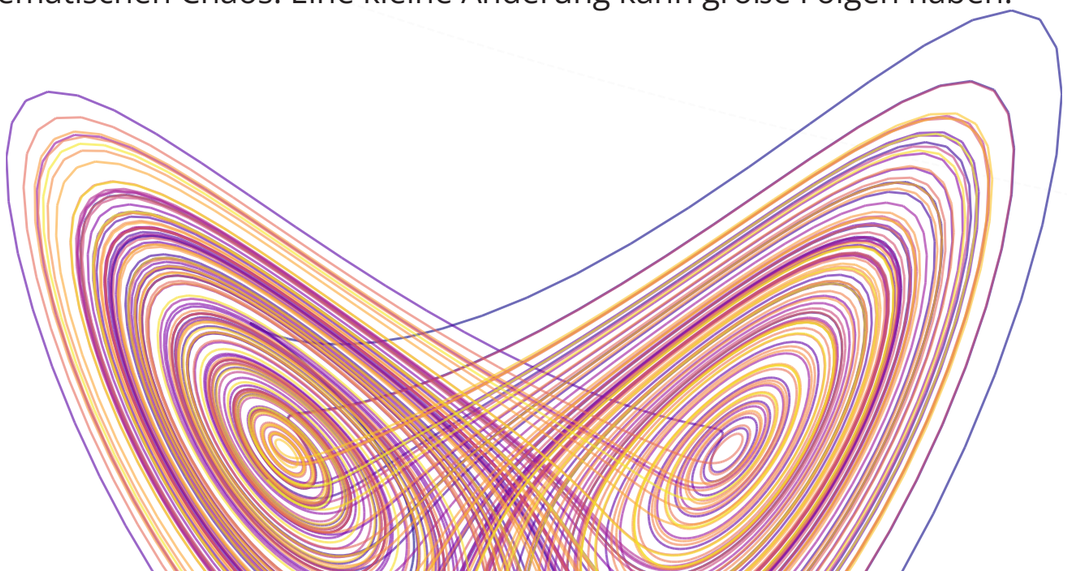
Mathematisches Chaos

Bereits in jungen Jahren lernen wir Menschen das Prinzip der Kausalität: Wenn A passiert, passiert auch B. Das ist tatsächlich ein fundamentales Prinzip der Physik und somit unserer Realität. Problematisch wird es, wenn wir den Zusammenhang von A und B zu sehr vereinfachen.

Viele von euch werden bestimmt schon mal vom Schmetterlingseffekt gehört haben:

Wenn ein Schmetterling in Argentinien mit den Flügeln schlägt, kann das zu einem Erdbeben in Madagaskar führen.

Tatsächlich beschreibt dieses Beispiel schon sehr gut die Idee hinter dem mathematischen Chaos. Eine kleine Änderung kann große Folgen haben.



Die Wissenschaft hat über die letzten Jahrzehnte fantastische Modelle und Computersimulationen geschaffen, die Dinge wie das Wetter perfekt vorher sagen könnten. Könnten deswegen, weil wenn man nicht die genauen Startwerte aller Eingaben kennt, das Ergebnis sich auf lange Zeit unfassbar stark ändert. Spielen wir mal so ein Beispiel durch:

Ich habe ein Wetterberechnungsprogramm. Ich muss jetzt alle momentanen Umstände eingeben, damit das Programm vorhersagen kann, wie sich das Wetter in Zukunft verhalten wird. Ich gebe also Werte für Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Druck und vieles weiteres an. Für die Temperatur gebe ich zum Beispiel 12C an.

Das Programm beginnt zu rechnen und kann mir für die nächsten Stunden sehr genau sagen, was passieren wird. Es sagt außerdem voraus, dass es in drei Tagen regnen wird.

Jetzt hole ich mir ein besseres Thermometer und messe die Temperatur nochmal. Da sehe ich, dass es eigentlich 12,4°C sind. Ich lasse das Programm nochmal laufen und plötzlich soll in drei Tagen nur die Sonne scheinen.

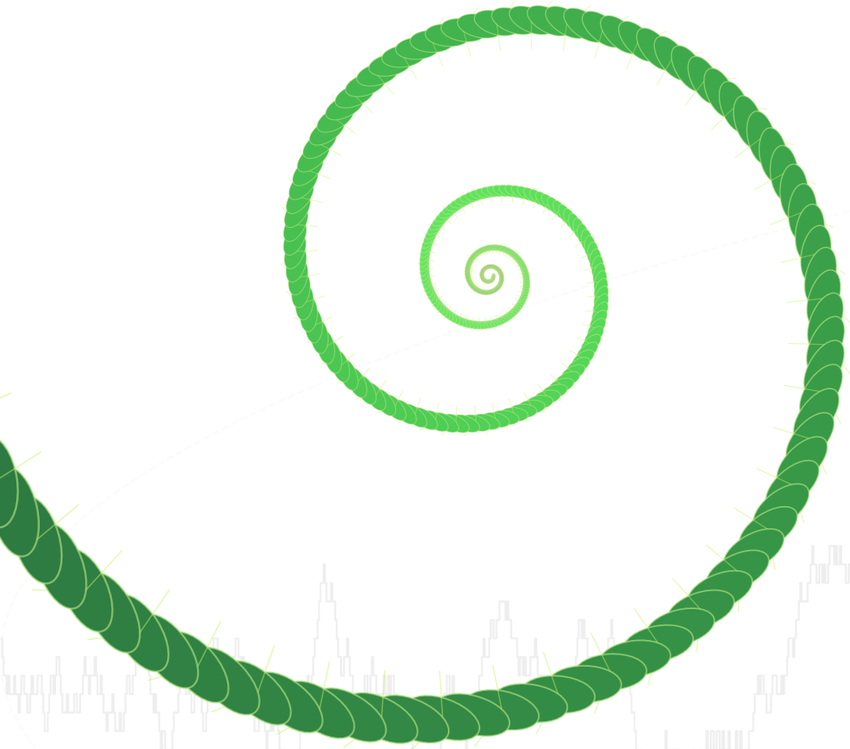
Das ist natürlich nur ein Beispiel, aber genau das sind die Abläufe, die bei jeder Berechnung dieser Art passieren.

Chaos in der Natur

Die Natur ist voll von mathematischem Chaos. Schaut man beispielsweise auf einen Brokkolikopf, sieht man Muster, die wie Baumzweige aussehen. Sie verasten sich immer weiter. Dieses Muster findet man zum Beispiel auch in Lungen. Die Lungenkapillarre nutzen auch Zweige, an denen immer wieder weitere Zweige hängen. Das erhöht den Oberflächeninhalt massiv und braucht trotzdem kaum mehr räumlichen Platz.

Die Strukturen, die sich da bilden, nennt man Fraktale. Man findet sie tatsächlich überall in der Natur.

Das Faszinierende ist, egal wie weit man in so ein Fraktal reinzoomt, es werden sich immer wieder neue Muster ergeben.



Das Sonensystem ist chaotisch

Isaac Newton glaubte, Gott müsse gelegentlich die Planetenbahnen nachjustieren, damit das Sonnensystem stabil bleibt. Pierre-Simon Laplace hielt es für ein perfekt berechenbares Uhrwerk. Erst Henri Poincaré bewies beim Drei-Körper-Problem 1889, dass die Bahnen nicht-integrabel sind. Jacques Laskar zeigte 1989 mit Computersimulationen: Das innere Sonnensystem (Merkur, Venus, Erde, Mars) besitzt eine Ljapunow-Zeit von nur rund 5 Millionen Jahren. Über Zeiträume von Milliarden Jahren ist die Bahn des Merkur chaotisch; er könnte mit der Venus kollidieren oder aus dem System geschleudert werden.

Auch das Weltall wird von Chaos regiert. Würde unser Sonnensystem nur aus Sonne und Erde bestehen, wäre es kein Problem vorherzusagen, wie sich die beiden auf alle Ewigkeiten verhalten würden. Sobald aber auch nur ein weiterer Körper, wie ein anderer Planet oder der Mond dazu kommt, ist es unmöglich langfristige Vorhersagen zu machen: Genauso wie beim Wetter. Deswegen gibt es Modelle die sagen, dass die Erde in einigen Millionen Jahren aus dem Sonnensystem geschleudert wird. Wenn man aber nur die Masse der Erde um ein paar Kommastellen ändert ist das System plötzlich wieder stabil.

Dieses Problem heißt in der Physik das Dreikörper-Problem. Weil sobald es Drei (oder mehr) Körper werden, das System so chaotisch ist, dass jede kleine Änderung riesige Einflüsse hat.

Bleiben wir beim Beispiel von Mond, Erde und Sonne. Alle drei Körper haben Masse und ziehen somit die jeweils anderen beiden Körper an. Wenn wir also beispielsweise schauen wollen was mit der Erde passiert, dann müssen wir schauen, wie dolle die Sonne und der Mond die Erde anziehen. Das Problem ist, dass die Sonne und der Mond sich gleichzeitig auch noch gegenseitig anziehen. Dazu kommt auch noch, dass die Erde auch Mond und Sonne anzieht.

Chaos erschafft Leben

Wir machen eine kurze Zeitreise: Vor etwa 4,5 Milliarden Jahren entstand die Erde. Vor ungefähr 3,8 Milliarden Jahren das erste Leben. Die Erde war zu dem Zeitpunkt eher wie die anderen Planeten bei uns im Sonnensystem. Es gab keine richtige Atmosphäre, erst recht keine Bäume und selbst Landflächen waren selten. Vieles war Wasser. Im Wasser schwammen nur vereinzelnt Moleküle. Man nennt dies die Ursuppe, quasi die ursprünglichste Suppe. Die Teilchen in der Ursuppe hatten kein Zlel und trieben einfach nur umher: Das reinste Chaos also.

Wenn Teilchen warm werden passiert etwas magisches: sie bewegen sich schneller.

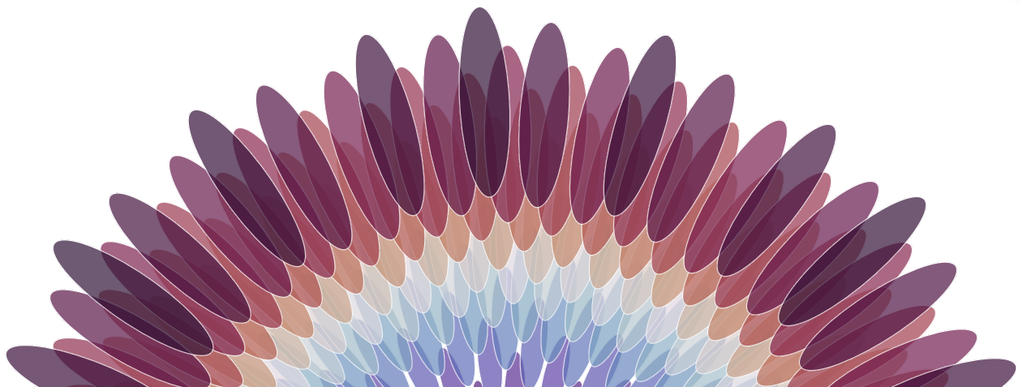
Die Wissenschaft geht davon aus, dass diese Ursuppe bei unterirdischen Vulkanen aus diesem Chaos Ordnung geschaffen hat. Durch das schnelle zufällige Rumfliegen der Teilchen kam es zu zufälligen Kombinationen von diesen. Diese Kombinationen wurden größer bis sie zu dem wurden, was wir heute Leben nennen. Wir Menschen stammen also von einer Ursuppe ab.

Dieses Experiment kann man tatsächlich auch selber durchführen. Dafür muss man nur eine Art eigene Ursuppe anmischen (ein paar Aminosäuren und Wasser reichen) und das erhitzen. Nach kurzer Zeit werden bereits komplexere Strukturen entstanden sein.

Mathematisches Chaos

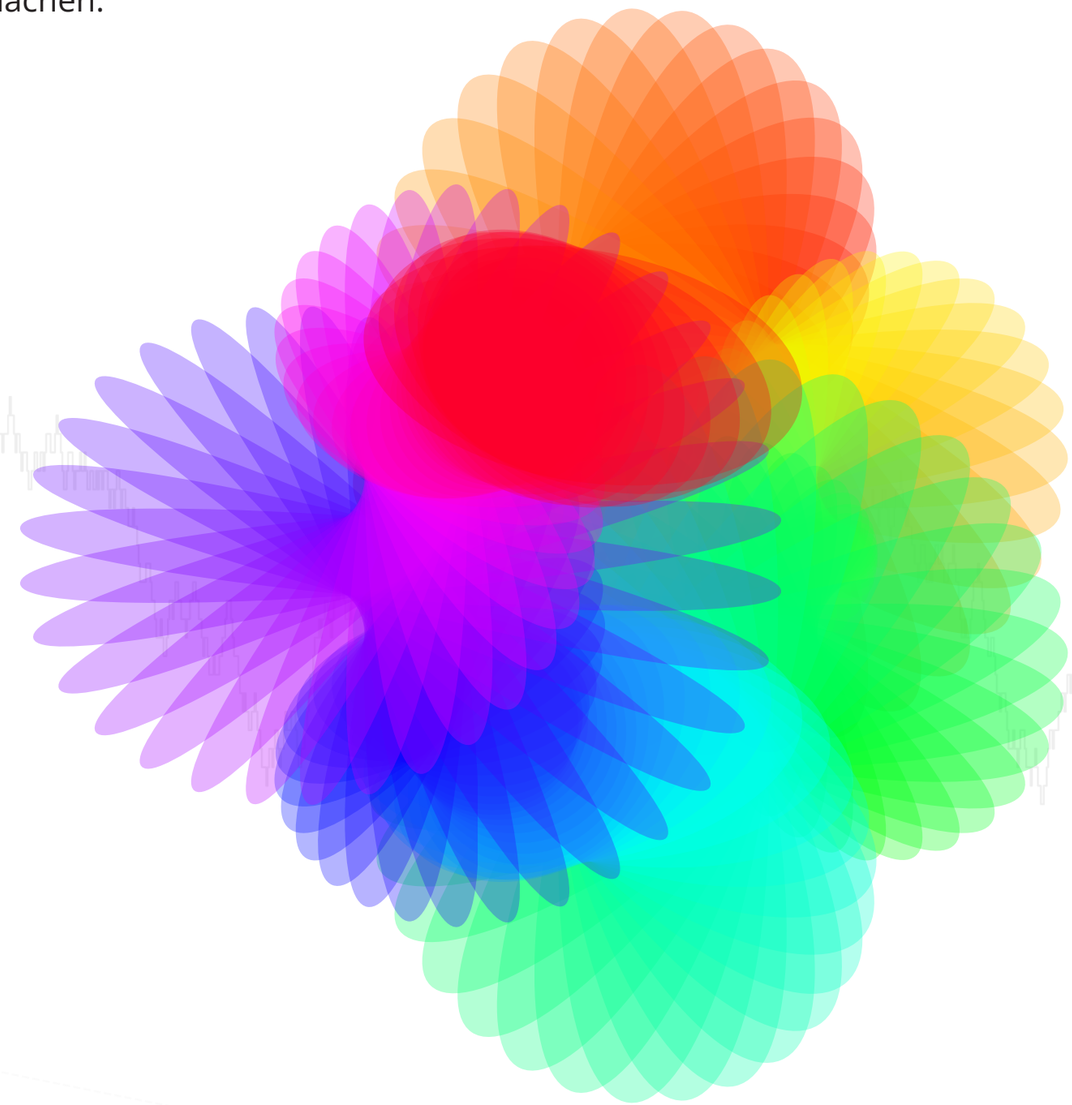
Die Chaostheorie nimmt uns die Illusion, dass wir alles kontrollieren könnten. Manchmal gibt es höhere Mächte auf die wir keinen Einfluss haben. Auch wenn wir Menschen bereits in vielerlei Hinsicht die Natur besiegen können werden wir nie über die Grundstruktur des Chaos hinwegkommen.

Was wir allerdings tun können, ist das für uns nutzen. Wir haben gelernt, das Kleinigkeiten große Änderungen herbeiführen können. Ein nettes Wort von uns zu jemanden der einen schlechten Tag hat kann eine Kettenreaktion auslösen, die ein ganzes Leben, vielleicht sogar die ganze Welt verändert.



DIE ELLIPSE

Dieser Artikel entstand im Rahmen einer Zusammenarbeit mit der Schülerzeitung des Johannes Kepler Gymnasiums Garbsens, der ELLIPSE. Die TRIVIAL-Redaktion unterstützt sowohl den Namen als auch die Zeitung selbst seit Jahren und möchte mit diesem Artikel, welcher parallel auch in der ELLIPSE erscheint Mathematik einem breiteren Publikum publik machen.



Das Bild visualisiert eine parametrisierte Familie von Ellipsen, deren Mittelpunkte einer Kreisbahn folgen, während ihre Haupt- und Nebenachsen durch periodische trigonometrische Funktionen kontinuierlich moduliert werden. Durch die zusätzliche lineare Eigenrotation der Formen entlang dieser Bahn entsteht durch Überlagerung die komplexe, symmetrische Hüllkurve eines gekoppelten harmonischen Systems.

Die Indiana Pi Bill

Stell dir vor, du würdest in einer Welt leben, wo wissenschaftliche Fakten nichts wert wären, wo die Wissenschaft der Politik folgt und nicht andersrum und wo Stimmen von Wissenschaftler*innen komplett ignoriert werden würden. Ich weiß, abstruser Gedanke. Das wäre ja total absurd, so etwas gibt es hier nicht. Um in so einer Realität zu leben, müssten wir in einer anderen Welt leben - und heute nehme ich euch hierfür mit in die USA, in die Welt der Indiana Pi Bill.

Die Kreiszahl Pi interessierte schon die Babylonier und Ägypter. Der Umfang eines Kreises durch seinen Durchmesser - so ist Pi definiert und schon vor 4000 Jahren wurde der Wert auf zwischen 3,125 und 3,16 bestimmt. Eine Erstaunlich präzise Erkenntnis dafür, dass damals das Konzept der Irrationalität unbekannt war. In der Bibel wurde der Wert 3 festgelegt - aufgrund des Herausgabedatums verzeihen wir hier mal den Christen. Um gut 300 vor Christus beschäftigte sich auch der griechische Mathematiker Archimedes mit der heute auch Archimedes-Konstante genannte Zahl und selbst in China wurde um ca. 400 n. Chr. der Wert auf 355/113 geschätzt - dies entsprach 6 korrekten Nachkommastellen. Nach und nach wurden die Berechnungsmethoden immer genauer, doch ein Ende kam nie.

Erst im späten 18. Jahrhundert wurde bewiesen, dass Pi irrational ist - ein Bruch wie aus China konnte folglich den genauen Wert nicht angeben. Der Beweis, dass Pi transzendent - und nicht Ergebnis eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten - ist, folgte ein Jahrhundert später.

Auch wurden zahlreiche Formeln entwickelt, wie sich Pi zumindest angenähert werden konnte.

Leibniz beispielsweise entwickelte 1673 diese wunderschöne Formel, leicht zu verstehen, aber leider unfassbar langsam. Um 10 richtige Nachkommastellen zu bestimmen, musste 5 milliarden Brüche addiert werden - das macht wenig Spaß.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

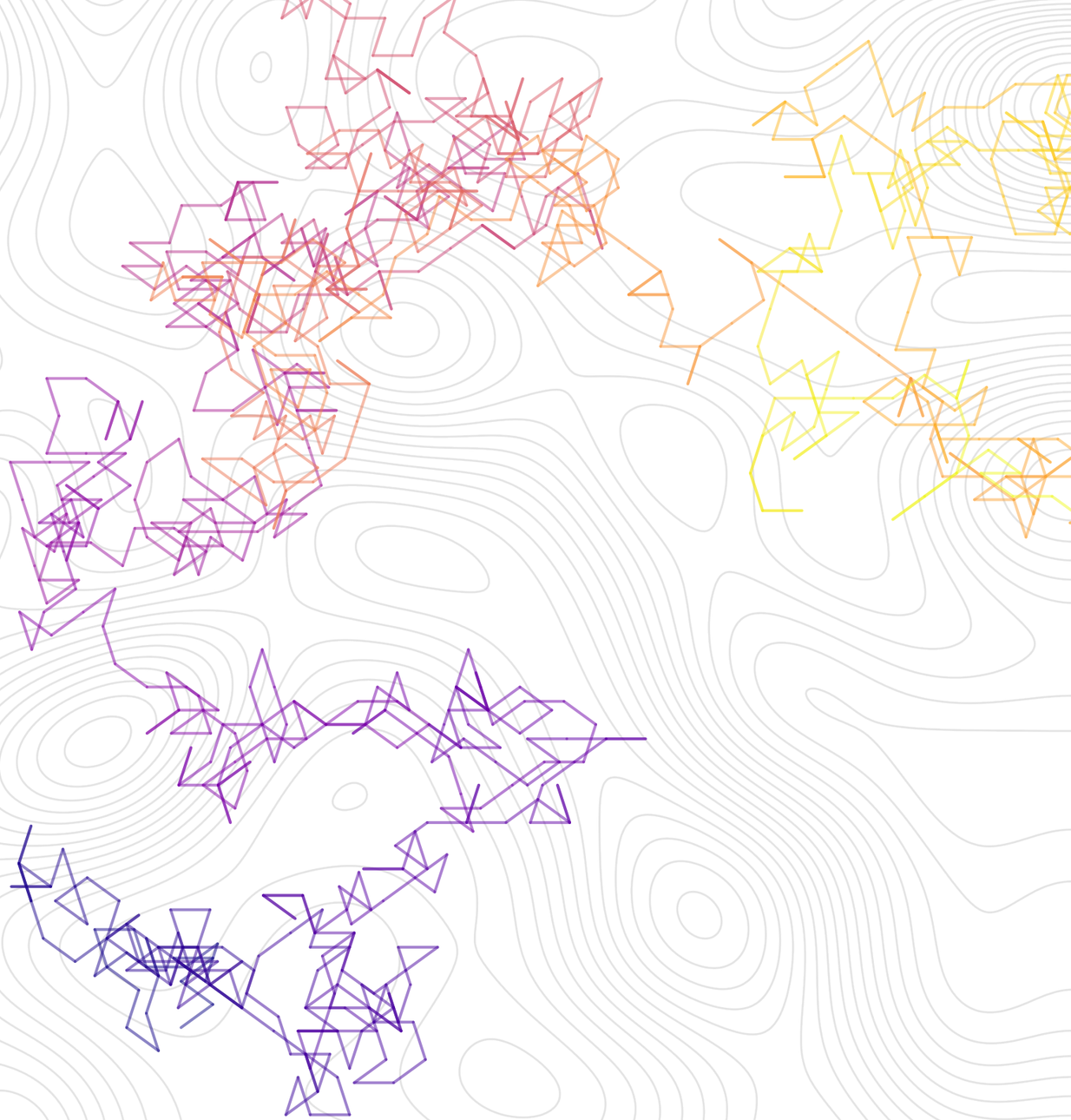
Spaß jedoch hatte 1914 der indische Mathematiker Ramanujan im Schlaf - denn statt von Einhörnern oder Dinos zu träumen, träumte er von diesem Monster:

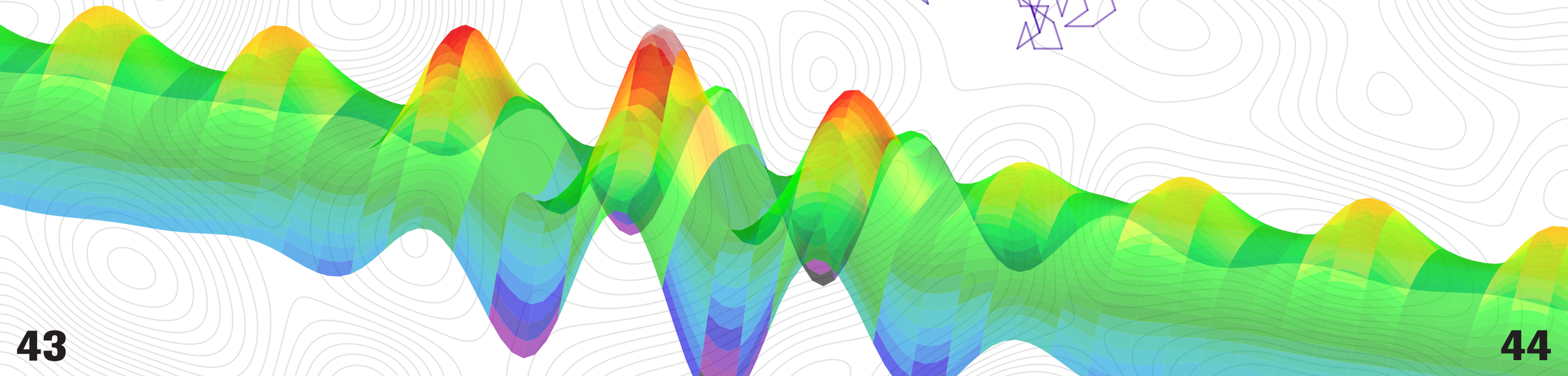
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

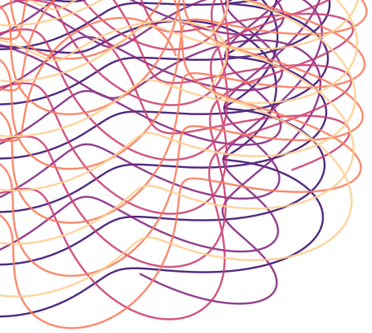
Diese Augenweide an Formel bewies er nie - denn er habe sie lediglich nur geträumt und wusste, dass sie wahr war. Der richtige Beweis folgte erst 1987 - bis dahin hat es vermutlich eher gebraucht, diese Formel allein schon zu verstehen. Und auch wenn die Berechnung davon deutlich komplizierter ist, wird diese oder eine Abwandlung dieser Formel heutzutage zur Berechnung von Pi genutzt - da sie unfassbar effizient ist, denn mit jeder Wiederholung der Summe werden im Schnitt 8 weitere korrekte Nachkommastellen berechnet.

Ende des 19. Jahrhunderts hatten aber anscheinend ehrwürdige Vertreter des Repräsentantenhauses genug von der ganzen Jagd nach Pi. Denn der Hobbymathematiker Goodwin, der ebenfalls auf “übernatürliche Weise” den exakten Wert von Pi erfahren hatte, wollte der Welt sein Wissen beweisen. In einer mathematischen Zeitschrift ließ er seine Erkenntnisse in einem Artikel abdrucken - als Werbung, wie wohl den wenigsten Lesern aufgefallen sein mag. Dieser Artikel selbst ist schwammig und voller Fehler - das hat das Repräsentantenhaus von Indiana jedoch nicht gestört. Denn ein Abgeordneter und mutmaßlicher Freund Goodwins ließ einen entsprechenden Gesetzentwurf abstimmen. Der gutmütige Goodwin erließ dem Staat Indiana sogar jegliche Gebühren für die Verwendung seines Wissens, für andere Nutzung beantragte er jedoch schon das Urheberrecht. Mit 67 zu 0 Stimmen wurde das Gesetz verabschiedet mit der Begründung, Indiana habe hierdurch einen Bildungsvorteil anderen Staaten gegenüber, die für die Nutzung dieses Wertes von Pi Gebühren zahlen müssten - doch der Senat musste noch zustimmen.

Eher aus Zufall erfuhr der Mathe-Professor Waldo von diesem Gesetzentwurf, kontaktierte den Senat und widerlegte hier die Ausführungen Goodwins. Die Senatoren stoppten vorerst die Entscheidung. Begründet wurde dies jedoch nicht mit der Widerlegung Goodwins Unsinn, sondern vielmehr mit dem Argument, dass der Senat eine solche Entscheidung nicht zu treffen habe. Dass der Wert falsch war, schien sie weniger zu interessieren.







Ein paar Take über

Aliens

Sind wir alleine da draußen?

Laut eingefleischten Schwurbler leben Außerirdische bereits seit Jahrzehnten unter uns. Angeblich kontrollieren sie Regierungen und kidnappen jedes Jahr unzählige Unschuldige. Vielleicht leben sie unter der Arktis, vielleicht aber auch in Atlantis.

Neben all diesen Lügenmärchen gibt es allerdings auch echte Wissenschaft. Leider ist diese ziemlich ernüchternd und auch ein wenig enttäuschend wenn es um die Frage nach Außerirdischem Leben geht. Um es vorweg zu nehmen, nein, es gibt noch keine Anzeichen für Außerirdisches Leben. Allerdings gibt es immer wieder populärwissenschaftliche Veröffentlichungen, sowohl im Print als auch Online, die behaupten etwas gefunden oder das Fermi Paradoxon gelöst zu haben.

Was ist das Problem?

Das Fermi Paradoxon beschreibt den Widerspruch zwischen der eigentlich hoch erwarteten Dichte an außerirdischem Leben und dem, was wir tatsächlich wahrnehmen: Nämlich gar kein außeriridisches Leben.

Im folgenden werden einmal ganz nüchtern die fast schon langweiligen Gründe aufgeführt, warum wir noch nichts von anderen Leben mitbekommen haben könnten.

Fermi erhielt 1938 den Nobelpreis für Physik für seine Arbeiten zur künstlichen Radioaktivität durch Neutronenbeschuss. Da seine Ehefrau Laura jüdischer Abstammung war und Mussolini kurz zuvor antijüdische Rassengesetze erlassen hatte, nutzte die Familie die Reise nach Stockholm zur Ausreise: Fermi reiste von Rom nach Schweden, holte den Preis ab und bestieg unmittelbar danach das Schiff in die USA, ohne jemals ins faschistische Italien zurückzukehren.

Licht ist unfassbar langsam

Die Lichtgeschwindigkeit ist die absolute Geschwindigkeitsobergrenze im Universum. Nichts kann sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Sobald etwas auch noch Masse hat, bleibt sogar die vollständige Lichtgeschwindigkeit unerreichbar.

Um Leben irgendwo im Universum wahrnehmen zu können, müssten wir in irgendeiner Form was von diesem Leben wahrnehmen. Und damit wir etwas durch unsere Teleskope sehen können, muss das Licht, das wir letztendlich sehen, erst zu uns kommen. Man darf nicht vergessen, die Längeneinheit Lichtjahr ist auf astronomischer Ebene vergleichbar mit unserer Alltagswahrnehmung eines Millimeters. Das gesamte beobachtbare Universum hat einen Durchmesser von ungefährt 93 Milliarden Lichtjahren. Wenn genau jetzt (also zu unserem Jetzt, Relativität mal außen vor gelassen) eine andere Zivilisation eine Milliarden Lichtjahre von uns entfernt eine Grußbotschaft in unsere Richtung senden würde, würde diese Nachricht eine Milliarden Jahre brauchen, um bei uns anzukommen. Und dabei sind so lustige Dinge wie die Ausbreitung des Universums, potentielle Absorption und der Gravitationslinseneffekt schon außen vor gelassen. Das Universum ist einfach schrecklich groß und Licht unfassbar langsam.

Wenn man eine Ameise in der Sahara aussetzen würde, wäre diese deutlich schneller in der Lage auf Leben zu treffen als wir in unserem riesigen Universum.

Wir leben in einer Leere

Tatsächlich ist die Erde bzw. die Milchstraße in einem Teil des Universums, welcher verhältnismäßig ziemlich leer ist. Diese Leere hat den kreativen Namen „das lokale Void". Diese Leere hat ungefähr einen Durchmesser von 200 Millionen Lichtjahren und hat deutlich weniger Galaxien als man eigentlich erwarten würde. Natürlich ist so die Wahrscheinlichkeit, dass wir auf andere treffen nochmal niedriger. Und das führt schon zum nächsten Punkt: Gibt es überhaupt wen?

Die Menschheit ist ein statistisches Wunder

Es ist ein unbeschreiblicher Zufall das die Menschheit überhaupt existiert. Millionen von Zufällen kamen zusammen damit unser Planet in dieser Form existiert und intelligentes Leben hervorbringt. So viele Kosmologische Kleinigkeiten wie der Abstand zur Sonne, überhaupt die richtige Sonne zu haben, Wasser zu haben und so weiter sind nicht unmöglich und treten auch öfters auf. Allerdings ist es auch nicht etwas das man zu Hauf im Universum findet. Natürlich kann Leben sich auch in ganz anderen Umgebungen theoretisch Entwickeln. Aber gerade Planeten die sehr nah oder sehr weit weg von Sternen sind haben deutlich schlechtere Karten.

Das nächste absolute statistische Wunder ist die Synthese von ersten äußerst simplen Molekülen und später Einzellern auf der Erde. Die momentane Wissenschaft ist sich nicht vollkommen sicher, wo das erste Leben genau entstand, aber es wird davon ausgegangen, dass es im Wasser in der Nähe von Unterwasservulkanen begann. Dort ist durch Wasser als Medium und durch die beschleunigte Brownsche Teilchenbewegung die Wahrscheinlichkeit am höchsten, dass es zu zufälligen Zusammenstößen von Molekülen kommt, die dann Leben bilden können.

Aber hier enden die Zufälle noch nicht. Diese wirklich primitiven Proto-Lebensformen haben sich teilweise "zusammen fusioniert" und sind Symbiose mit anderen Lebensformen einfangen. Und dabei gibt es keine Garantie, dass genau das passiert!

Zu jedem Zeitpunkt hätte der Fortschritt der Entwicklung einfach aufhören können.

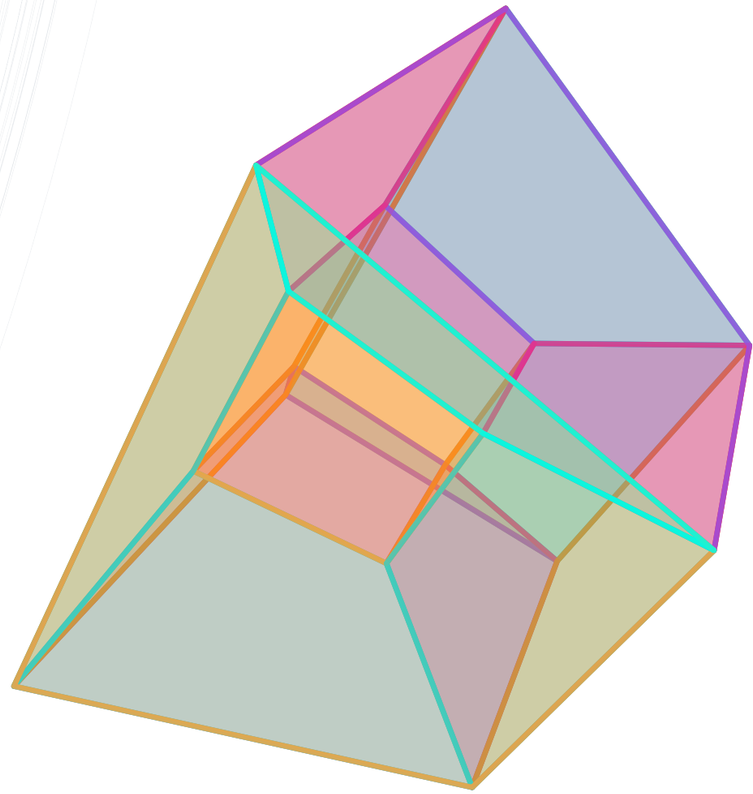


$$Z(t) = e^{i\,\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right)-\frac{t}{2}\ln\pi}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

Riemann-Siegel Z Funktion

Dazu kommt auch noch, dass die Erde permanent unter starker Belastung stand. Seitdem es Leben auf der Erde gibt, gab es auch schon immer wieder globale Auslöschungen, die fast alles Leben ausgelöscht haben. Sonnenstürme oder Kollisionen mit kosmischen Objekten haben öfters das Leben auf der Erde als solches stark bedroht.

Und doch sind wir hier. Und nicht weil die Erde etwas Übernatürliches hat, sondern einfach wegen der "Survivership-bias". Natürlich glauben die, die bei Zufällen gewinnen, daran, dass sie etwas besonderes sind. Aber rein statistisch hätte es auch jeden anderen treffen können.



Ein Tesseract (4D Hyperwürfel) von 4D in 3D und anschließend von 3D in 2D projeziert

Weird Paper

Taylor Swifts Einfluss auf die Astrophysik

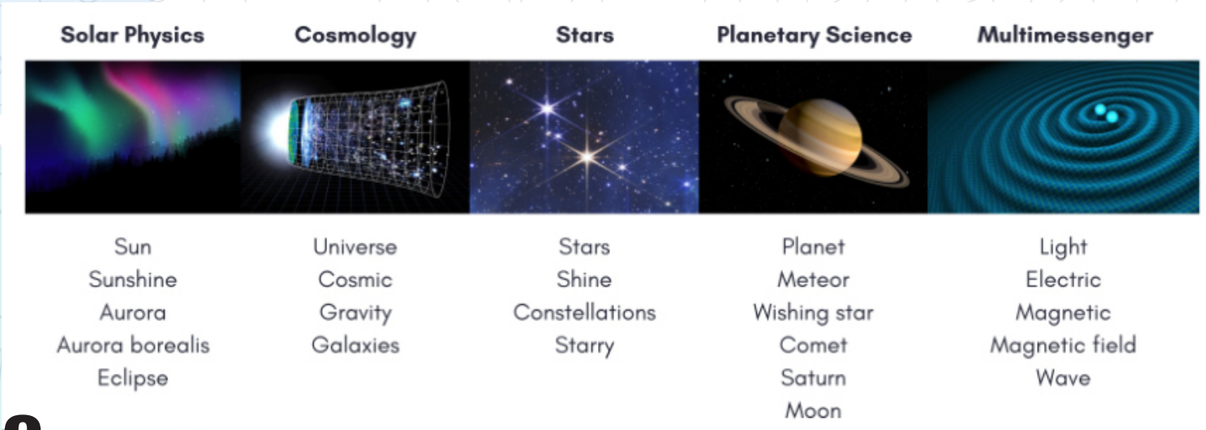
Am 1. April 2025. veröffentlichten Sophie L. Newman und Ana Saintz de Murieta den Artikel A Swift analysis of the Eras tour set list and implications for astrophysics research (Taylor's version).

Wie der Titel vermuten lässt, wird hier Taylor Swifts Diskographie sowie ihre Eras Tour Setlist wissenschaftlich präzise auf ihren astrophysikalischen Inhalt geprüft.

Abstract (10 Minute Version)

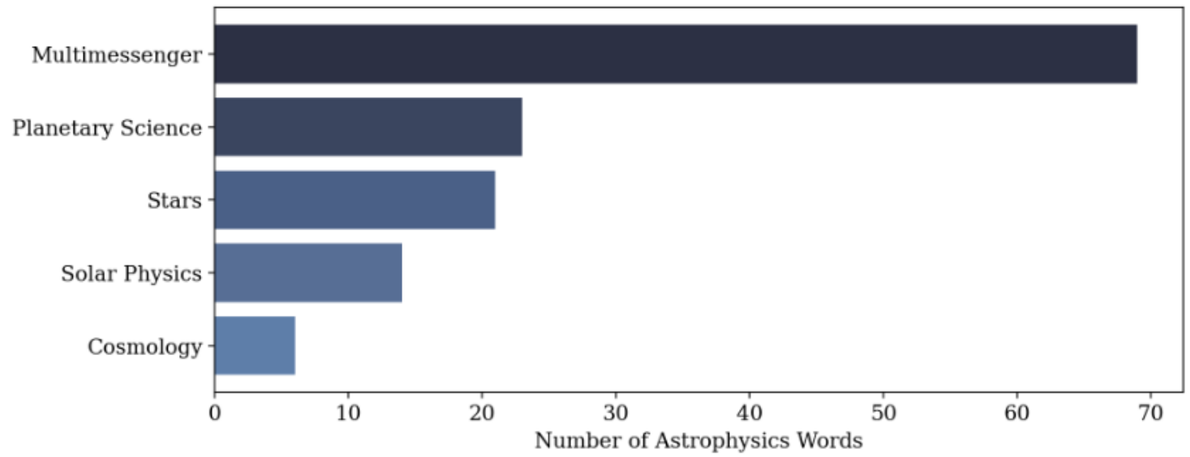
Der Artikel beginnt mit einer Historie von Astrophysik in der Popkultur. Damit gehört der Artikel zu einer von 18000 Fachartikeln, die Frank Herberts Dune in irgendeiner Form erwähnen (das ist überraschend viel für ein Science Fiction Buch).

Der Artikel untersucht zum einen die Gesamtfrequenz von Begriffen der Astrophysik, als auch die anscheinende Präferenz von Taylor Swift zu verschiedenen Teilbereichen der Astrophysik. Die Autoren haben folgende 5 Teilbereiche identifiziert:



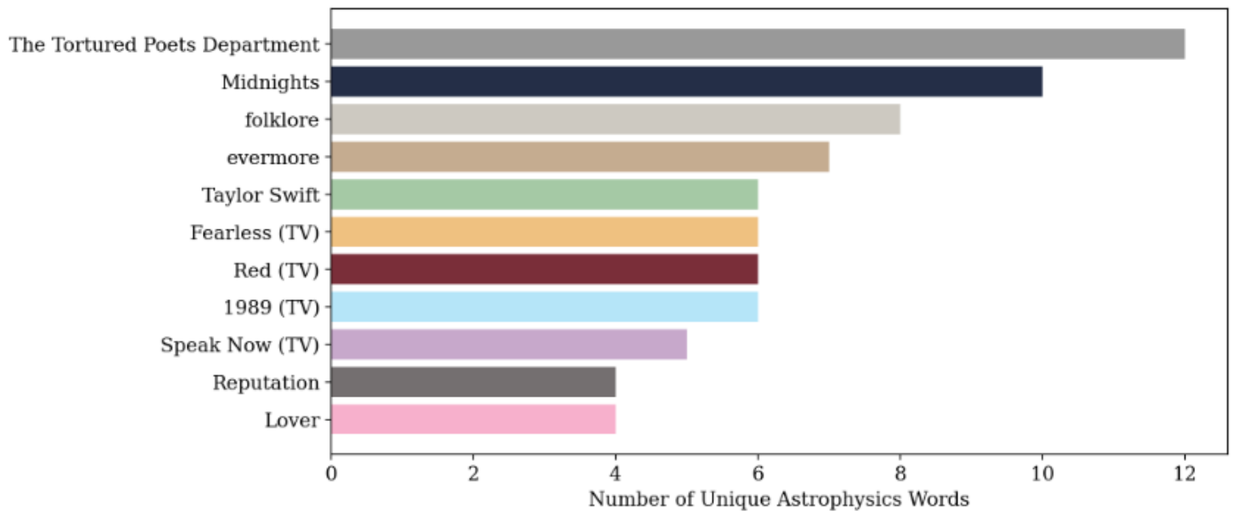
Der eindeutige Favorit

Mit Abstand am beliebtesten scheint der Bereich der Multimessenger zu sein:



Die astrophysikalische Reise

Es lässt sich außerdem erkennen, dass die Anzahl an astrophysikalischen Fachbegriffen sich durchaus von Album zu Album ändert:



Die mathematische Auswertung

Da aber die Alben unterschiedlich lang sind, haben die Autorinnen den APS eingeführt: Den Astrophysics Promotion Score. Dieser soll präziser sein als eine einfache Zählung von Fachbegriffen. Er summiert das Produkt der Astrophysikalischen Wörter und der absoluten Anzahl an Plays während der Eras Tour.

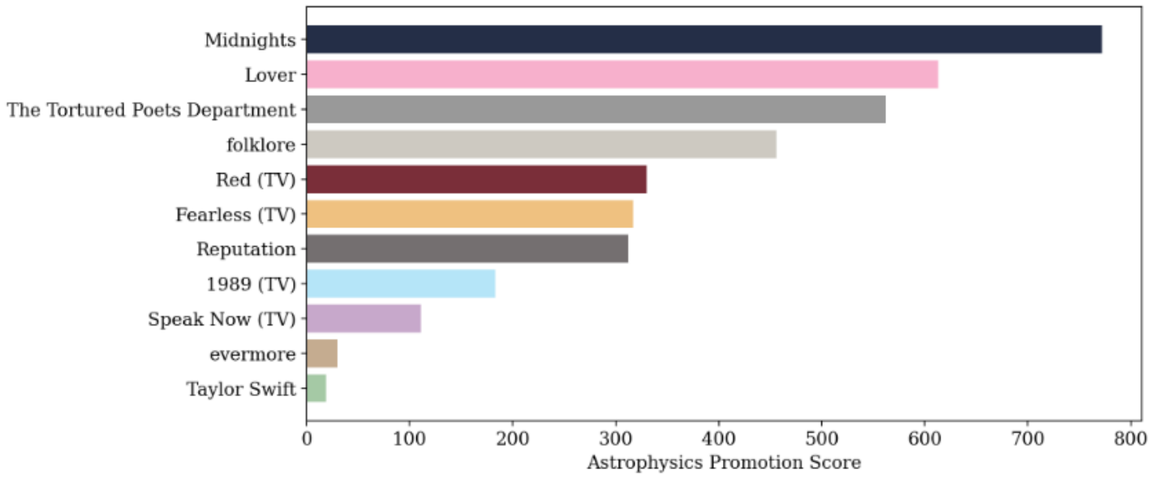
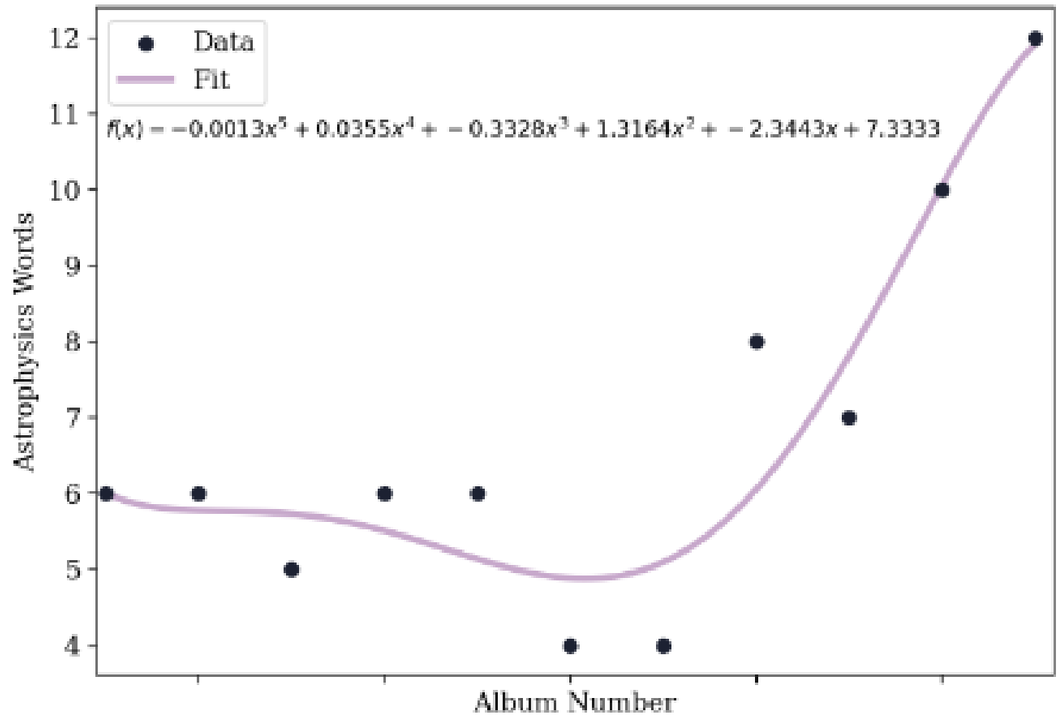


Figure 3. Astrophysics promotion score for each of Swift's albums during the Eras tour, calculating by weighting the number of astrophysics words in each song by the number of times it was played during the Eras tour, then computing the weighted sum for each album.

Die Autorinnen haben sich auch nicht lumpen lassen und eine Taylor Regression gemacht, um vorherzusagen, wie oft astrophysikalische Begriffe in der Zukunft auftreten werden.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Eine TAYLOR-Reihe, wie lustig



Hier lässt sich ein klarer Aufwärtstrend erkennen. Die Autorinnen gehen davon aus, dass Taylor Swift in Zukunft noch viel mehr Astrophysik einbauen wird. Nach ihren Berechnungen werden 12+-5 einzigartige Astrophysik-Referenzen im nächsten Album vorhanden sein. Sie gehen außerdem davon aus, dass Gravitationslinseneffekt sowie hohe Rotverschiebung einen größeren Platz in den nächsten Werken haben werden. Dafür haben sie sogar ein paar Lyrics-Ideen niedergeschrieben. Auf der nächsten Seite sind ein paar Highlights der Redaktion

Dichter UND Denker

Through your gravity, I curve, a path I can’t control

Deine Gravitation krümmt meine Bahn, ein Weg, dem ich nicht entkommen kann

We were chasing shadows in the dark, But ΛCDM still holds its spark.

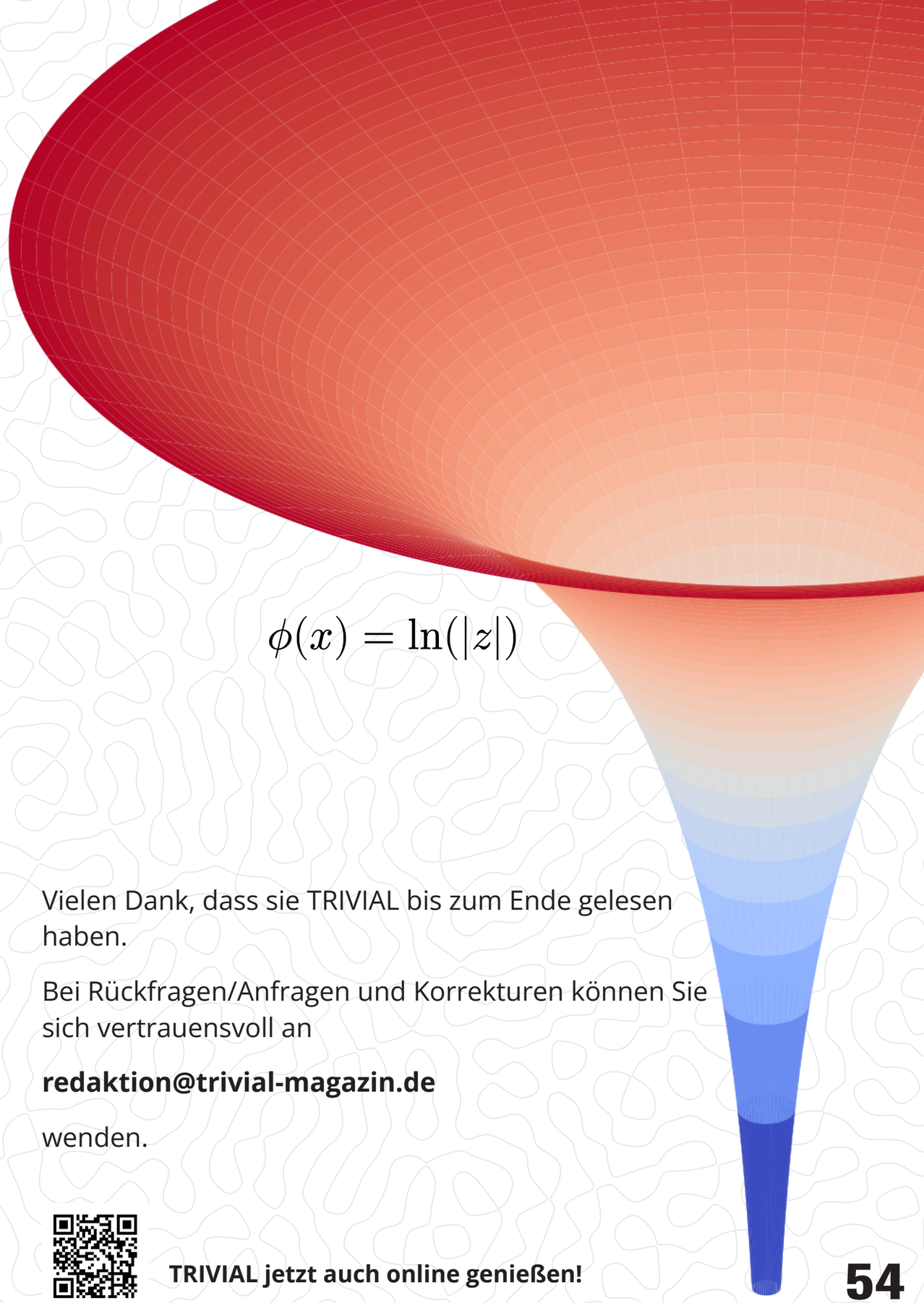
Wir jagten Schatten in der Dunkelheit, doch ΛCDM strahlt hell noch alle Zeit.

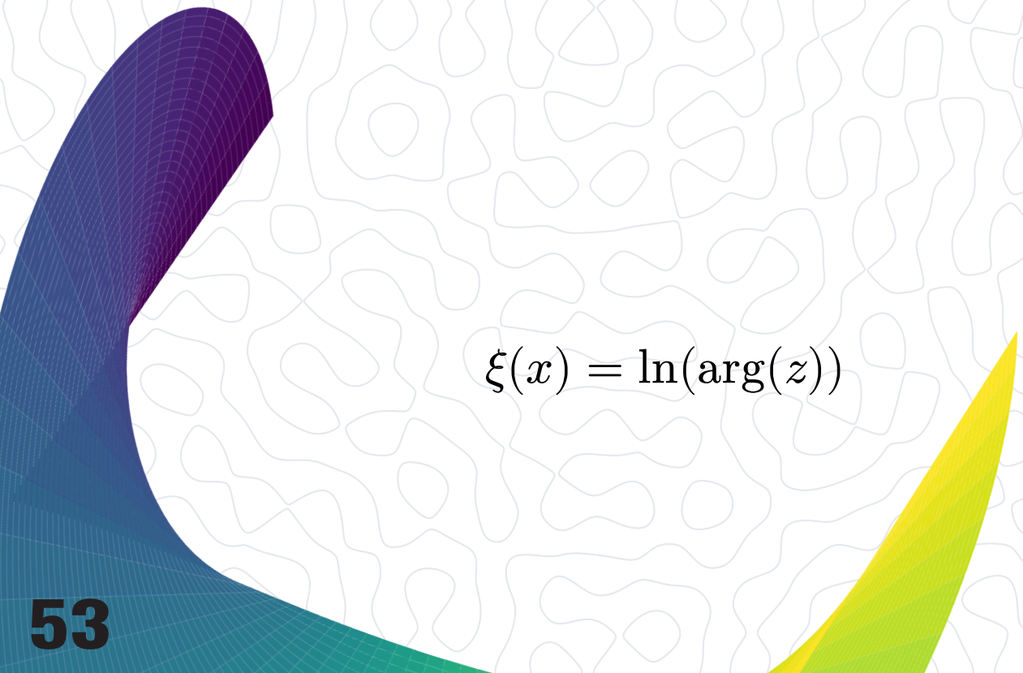
Oxygen sings, hydrogen cries, A spectral echo left in the sky.

Sauerstoff singt, Wasserstoff weint, am Himmel ein spektrales Echo erscheint.

Dark energy’s fading, I feel you near, The universe slows, but your voice stays clear.

Die dunkle Energie verblasst, ich spüre dich nah, das All wird langsamer, doch deine Stimme ist klar





Vielen Dank, dass sie TRIVIAL bis zum Ende gelesen haben.

Bei Rückfragen/Anfragen und Korrekturen können Sie sich vertrauensvoll an

redaktion@trivial-magazin.de

wenden.

TRIVIAL jetzt auch online genießen!

Trivial

Die Redaktion

Max Busjahn

Moin Moin, ich grüße alle Wissenschaftsinteressierte und die, die es noch werden wollen. Ich bin Physikstudent und beschäftige mich seit Jahren hobbymäßig mit der Mathematik und Physik. Seit Jahren hatte ich die Idee, selber Wissenschaftscontent zu veröffentlichen. Durch Zufälle kam eins zum anderen und nun sitzen wir hier und schreiben Artikel über Trivia und Wissenswertes rund um die bunte Welt der Naturwissenschaften.

max@trivial-magazin.de

Antonia Bögershausen

Guten Morgen an alle Leser*innen, die sich bis hierhin durchgeschlagen haben. Ich bin Studentin und habe vor einiger Zeit über YouTube Interesse an komplexer Mathematik gefunden. Vor allem die Riemannsche Vermutung war der Grund, weswegen ich tiefe Verknüpfungen in der Mathematik, die anfangs ziemlich unbegründet scheinen, zutiefst faszinierend fand. Deswegen schreibe ich für TRIVIAL - um dieses Interesse in anderen zu wecken und um mich selbst mit weiteren solcher Themen zu beschäftigen.

antonia@trivial-magazin.de